Limieten

Theorie: De begrippen limiet en continuïteit

Laat f een functie zijn, gedefinieerd op een interval of een vereniging van intervallen.

Definitie: Het begrip limiet

We zeggen dat "de limiet van $f(x)$ in $x = a$ gelijk is aan L" en noteren dit als

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

als voor ieder klein interval I rond L, er een klein interval rond a bestaat waarvan ieder punt door f binnen I wordt afgebeeld. Dus punten in de buurt van a worden door f op punten in de buurt van L afgebeeld. De functie f hoeft niet gedefinieerd te zijn in a zelf.

Definitie: Het begrip continuïteit

De functie f heet continu in a als f wel gedefinieerd is in a en $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
Als een functie f in elk punt continu is, dan heet f continu.

Elementaire functies zoals $x^n, \sin(x), \cos(x), e^x$ zijn continu.

Bekende functies zoals $\ln(x), \tan(x)$ zijn niet voor elke waarde van x gedefinieerd, maar zijn continu waar ze gedefinieerd zijn.

Functies die zijn opgebouwd uit elementaire functies door middel van optellen, delen, vermenigvuldigen en ook samenstellen (in elkaar invullen, bijvoorbeeld $f(g(x)) = \sin(\tan(x))$ voor $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \tan(x)$), zijn continu waar ze gedefinieerd zijn.

Voorbeeld

De functie $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ is overal gedefinieerd: de noemer $1 + x^2$ is overal positief en in het bijzonder nooit nul. De functie is continu.

Voorbeeld

De functie $f(x) = \dfrac{x - 2}{x - 2}$ is overal gedefinieerd behalve in $x = 2$. Overal waar f gedefinieerd is, heeft het de waarde 1. Dus de limiet van f in 2 is ook 1

Voorbeeld

Bereken de limiet $\lim_{x \to 9} f(x)$ van de functie

$$f(x) = \frac{x - 9}{x^2 - 81}.$$

Uitwerking:

$$\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{x^2-81} = \lim_{x\to 9} \frac{x-9}{(x-9)(x+9)}$$

$$= \lim_{x\to 9} \frac{1}{x+9}$$

$$= \frac{1}{18}$$

Voorbeeld

Bereken de limiet $\lim_{x\to 0} f(x)$ van de functie

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+49}-7}{x^2}.$$

Uitwerking:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+49}-7}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+49}-7}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+49}+7}{\sqrt{x^2+49}+7}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+49}+7)} \quad \big(\text{want } (a-b)(a+b) = a^2-b^2\big)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+49}+7}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{49}+7}$$

$$= \frac{1}{7+7} = \frac{1}{14}$$

Voorbeeld

De limiet $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ bestaat niet, want

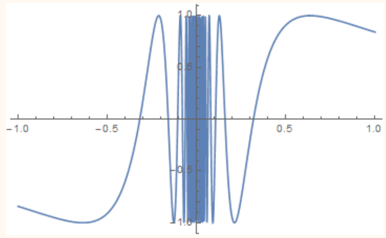
$$\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = 0 \text{ voor } x_n = \frac{1}{n\pi}$$

en

$$\sin\left(\frac{1}{y_n}\right) = 1 \text{ voor } y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{1}{2}\pi}$$

(x_n en y_n zijn punten in de buurt van 0 als n een groot getal is).

De grafiek van de functie $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ziet er als volgt uit:



Opgaven: Oefenen met de begrippen

Vraag 1

Bereken de limiet $\lim_{x \to 5} f(x)$ van de functie

$$f(x) = x^2 + 2x + 7.$$

$\lim_{x \to 5} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$

Vraag 2

Bereken de limiet $\lim_{x \to 5} f(x)$ van de functie

$$f(x) = \frac{x-5}{x^2-25}.$$

$\lim_{x \to 5} \frac{x-5}{x^2-25} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$

Vraag 3

Bereken de limiet $\lim_{x \to 0} f(x)$ van de functie

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+36}-6}{x^2}.$$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+36}-6}{x^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$

Vraag 4

Bereken de limiet $\lim_{x\to -2} f(x)$ van de functie

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^4-16}.$$

$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x^4-16} =$ ....

Vraag 5

Net zoals twee verschillende functies toevallig dezelfde functiewaarde kunnen hebben in een bepaald punt, kunnen twee verschillende functies ook dezelfde limiet hebben in een bepaald punt, zelfs als de functiewaarden in dat punt niet gedefinieerd zijn. Beschouw bijvoorbeeld

$$f(x) = \frac{9x^2-9x}{x-1}, \qquad g(x) = \frac{6x^3-6x^2-ax+a}{x-1}.$$

Deze functies zijn niet gedefinieerd in $x = 1$, maar voor een bepaalde waarde van a zijn hun limieten voor $x \to 1$ gelijk aan elkaar. Welke waarde is dat?

$a =$ ....

Theorie: Linker- en rechterlimiet en oneindig

Definitie: Linker- en rechterlimiet

Als bij een limiet alleen punten $x > a$ in beschouwing genomen worden, wordt geschreven

$$\lim_{x\downarrow a} f(x)$$

en spreken we van de rechterlimiet (ook wel de limiet van boven).
Analoog schrijven we

$$\lim_{x\uparrow a} f(x)$$

in het geval alleen waarden $x < a$ bekeken worden linkerlimiet (ook wel limiet van onderen).

Definitie: Oneindig als limiet

Een limiet heet oneindig te zijn

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

als $f(x)$ willekeurig groot wordt voor x in de buurt van a. Dat wil zeggen, voor elk groot getal N is er een klein interval rond a, zodat $f(x) > N$ voor elke x uit dat kleine interval.

Voorbeeld

Welke limieten heeft $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ bij $x = -5$ en $x = 5$?
Uitwerking:
Het domein van f is $[-5, 5]$.
Dus is f alleen gedefinieerd rechts van $x = -5$ en links van $x = 5$.
We hebben

$$\lim_{x \downarrow -5} f(x) = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{x \uparrow 5} f(x) = 0$$

Voorbeeld

Bereken

$$\lim_{x \downarrow 3} \frac{1}{x-3} \quad \text{en} \quad \lim_{x \uparrow 3} \frac{1}{x-3}$$

Uitwerking:
Het domein van $\frac{1}{x-3}$ is gedefinieerd buiten $x = 3$
Rechts van $x = 3$ zijn functiewaarden positief en links van $x = 3$ negatief.
We hebben dus

$$\lim_{x \downarrow 3} f(x) = \infty \quad \text{en} \quad \lim_{x \uparrow 3} f(x) = -\infty$$

Voorbeeld

$$\lim_{x \to 5} \frac{7}{|x-5|}$$

Uitwerking: Naarmate x dichter bij 5 komt, wordt $f(x)$ groter. De gevraagde limiet is dus ∞

Voor de liefhebber geven we een bewijs.
Laat f de functie $f(x) = \frac{7}{|x-5|}$ zijn en laat M een willekeurig gekozen positief getal zijn. (Het gaat vooral om willekeurig grote waarden.) Neem $\delta = \frac{1}{M}$. We beweren het volgende: als $|x-5| < \delta$, dan $f(x) \geq M$. Stel namelijk dat $|x-5| < \delta$. Hieruit volgt: $\frac{1}{|x-5|} > \frac{1}{\delta} = |M|$ en dus ook: $f(x) = \frac{7}{|x-5|} \geq 7 \cdot |M| \geq M$.

Als a een reëel getal is met $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, dan is f niet continu in a.

Definitie: limiet in oneindig

We kunnen ook het gedrag van een functie bij het oneindige bekijken. Een uitdrukking

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

betekent dat $f(x)$ ongeveer gelijk is aan L voor grote waarden van x. Ofwel, voor elk klein interval I rond L is er een groot getal M te vinden zodat $f(x)$ in I ligt voor elke $x > M$.

Voorbeeld

Bereken

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+4}$$

Uitwerking:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+\frac{4}{x}} = 0$$

De laatste stap volgt uit het feit dat de noemer naar oneindig gaat als $x \to \infty$.

Voorbeeld

Bereken

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-1-4x^2}{-3x^2+3x}$$

Uitwerking:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-1-4x^2}{-3x^2+3x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{-1-4x^2}{-3x^2+3x} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{x^2}-4}{-3+\frac{3}{x}} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

Hier zijn teller en noemer van de breuk door de hoogst voorkomende macht x^2. De berekening maakt duidelijk dat alleen de hoogst voorkomende machten bij een limiet naar oneindig van belang zijn voor de waarde van de limiet.

Opgaven: Oefenen met linker- en rechterlimiet en oneindig

Vraag 1

Bereken

$$\lim_{x\uparrow 0} \frac{|x|}{x}$$

$\lim_{x\uparrow 0} \frac{|x|}{x} =$ ....

Vraag 2

Bereken

$$\lim_{x \downarrow -2} \ln(2x+4)$$

$\lim_{x \downarrow -2} \ln(2x+4) =$ ....

Vraag 3

Bereken

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2+2}$$

....

Vraag 4

Bereken

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-5+x^2}{-4x^2+x}$$

$\lim_{x \to \infty} \frac{-5+x^2}{-4x^2+x} =$ ....

Vraag 5

$$\lim_{x \to 2} \frac{-7}{|x-2|}$$

$\lim_{x \to 2} \frac{-7}{|x-2|} =$ ....

Vraag 6

Bereken

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 \sin(x)}{x^4-1}$$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 \sin(x)}{x^4-1} =$ ....

Theorie: Voorbeelden van limieten in oneindig en min oneindig

Er volgen nog een paar voorbeelden van limieten in oneindig of min oneindig.

Voorbeeld

Bereken

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\sin(x)}{4x^4+2}$$

Uitwerking:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\sin(x)}{4x^4+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sin(x)}{4x^2+\dfrac{2}{x^2}} = 0$$

De laatste stap volgt uit het feit dat de teller tussen -1 en 1 blijft en de noemer naar ∞ gaat als $x \to -\infty$.

Voorbeeld

Bereken

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{25x^2+4}}$$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{25x^2+4}} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(25+\dfrac{4}{x^2}\right)}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{25+\dfrac{4}{x^2}}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{25+\dfrac{4}{x^2}}} \qquad \text{want } \sqrt{x^2}=|x| \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{sign}(x)}{\sqrt{25+\dfrac{4}{x^2}}} \qquad \text{met } \operatorname{sign}(x) = \text{teken van } x \\
&= -\frac{1}{5}
\end{aligned}$$

De laatste stap volgt uit het feit dat $\dfrac{4}{x^2}$ naar 0 gaat voor $x \to -\infty$.

Voorbeeld

Bereken

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x-5}-\frac{x^2-3}{x+5}\right)$$

Uitwerking:

Merk eerst op dat zowel $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x-5}$ als $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3}{x+5}$ gelijk zijn aan oneindig. Daarmee is onduidelijk wat het verschil tussen beide termen ongeveer is voor grote waarden van x. Hiertoe schrijven we de breuken als één breuk door gelijke noemers te maken.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x-5}-\frac{x^2-3}{x+5}\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x-5}\cdot\frac{x+5}{x+5}-\frac{x^2-3}{x+5}\cdot\frac{x-5}{x-5}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+3)(x+5)-(x^2-3)(x-5)}{(x-5)(x+5)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{10x^2+6x}{x^2-25}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{10+\frac{6}{x}}{1-\frac{25}{x^2}}\\
&= 10
\end{aligned}$$

Opgaven: Verder oefenen met limieten in oneindig

Vraag 1

Bereken

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{9x^2+1}}$$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{9x^2+1}} =$ ....

Vraag 2

Bereken

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-2}-\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-2}-\frac{x^2}{x+2}\right) = \text{ ....}$$

Vraag 3

Bereken

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x = \text{ ....}$$

Vraag 4

Bereken

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{2x+4}-x\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{2x+4}-x\right) = \text{ ....}$$

Theorie: Rekenregels voor limieten

Regel

Als $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ en $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ bestaan en minstens één limiet oneindig is, dan geldt:

$$\lim_{x\to a}\big(c\cdot f(x)\big) = c\cdot\lim_{x\to a} f(x)$$

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = \big(\lim_{x\to a} f(x)\big)+\big(\lim_{x\to a} g(x)\big)$$

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \big(\lim_{x\to a} f(x)\big)\cdot\big(\lim_{x\to a} g(x)\big)$$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \quad \text{mits } \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$$

Als $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ en f is continu in b, dan geldt $\lim\limits_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f(b)$.

Voorbeeld

Bereken de limiet $\lim_{x\to -3} f(x)$ van de functie

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x^4-81}.$$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x^4-81} &= \lim_{y\to 9} \frac{y-9}{y^2-81} && \bigl(\text{neem } y = x^2\bigr)\\
&= \lim_{y\to 9} \frac{y-9}{(y-9)(y+9)} && \bigl(\text{gebruik } a^2-b^2=(a-b)(a+b)\bigr)\\
&= \lim_{y\to 9} \frac{1}{y+9}\\
&= \frac{1}{18}
\end{aligned}$$

Bovenstaande rekenregels blijven geldig wanneer alleen linkerlimieten of rechterlimieten in het spel zijn of wanneer limieten in oneindig aan bod komen.

Opgaven: Oefenen met rekenregels

Vraag 1

Bereken de limiet $\lim_{x\to -2} f(x)$ van de functie

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^4-16}.$$

$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x^4-16} =$ ....

Vraag 2

Bereken de limiet $\lim_{x\to 0} f(x)$ van de functie

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+25}-5}{x^2}.$$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+25}-5}{x^2} = $ ....

Vraag 3

Bereken

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$$

$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} = $ ....

Vraag 4

Bereken

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x^2+4x-5}$$

$\lim_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x^2+4x-5} = $ ....

Vraag 5

Bereken

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{x+2} - x \right)$$

$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{x+2} - x \right) = $ ....

Vraag 6

Bereken

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{36+x}-6}{x}$$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{36+x}-6}{x} = $ ....

Vraag 7

Bereken

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+3}+x$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+3}+x =$ ....

Vraag 8

Bereken

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+7x}-1}{x}$$

door te substitueren $1+7x=t$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+7x}-1}{x} =$ ....

Theorie: Insluitstelling voor limieten

Stelling: Insluitstelling

Als

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

en

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x)$$

dan is ook

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x).$$

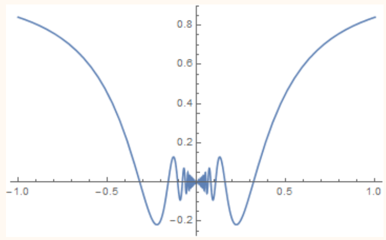
Voorbeeld

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Immers: $-x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$ en $\lim\limits_{x\to 0} \pm x = 0$. Hier wordt de functie ingeklemd tussen twee andere functies waarvan we de limiet eenvoudig kunnen bepalen.

Merk op dat de volgende functie continu is:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{als } x \neq 0, \\ 0 & \text{als } x = 0. \end{cases}$$



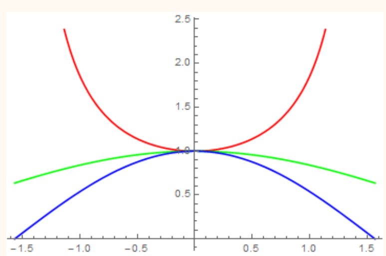
Voorbeeld

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Er kan immers aangetoond worden dat voor $x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ geldt:

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

Omdat $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos(x)} = 1$ volgt het resultaat uit de insluitstelling. Hier wordt de functie ingeklemd tussen twee andere functies waarvan we de limiet eenvoudig kunnen bepalen. Hieronder staan de grafieken van $\dfrac{1}{\cos(x)}$ in rood, $\dfrac{\sin(x)}{x}$ in groen en $\cos(x)$ in blauw getekend.



De insluitstelling is ook geldig bij limieten in oneindig.

Opgaven: Oefenen met insluitstelling

Vraag 1

Bereken

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 \sin(x)}{3x^4 + 4}$$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 \sin(x)}{3x^4+4} =$ ....

Theorie: Regel van De L'Hôpital

Stelling: Regel van De L'Hôpital

Stel dat $f(x)$ en $g(x)$ functies zijn waarvoor de afgeleiden in de buurt van een punt $x = a$ bestaan en ook $g'(x) \neq 0$ voor $x \neq a$ maar wel in de buurt van a.
Veronderstel verder dat $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ en $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ (beide limieten gelijk aan 0) of $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ en $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ (beide limieten gelijk aan plus of min oneindig).
Dan geldt:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Voorbeeld

De regel van De L'Hôpital levert de volgende standaardlimiet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

Dit betekent dat voor kleine x (x in de buurt van 0) de sinus goed te benaderen is met de identiteitsfunctie $x \mapsto x$. Deze benadering van $\sin(x)$ met x wordt heel vaak gebruikt als er sprake is van trillingen met kleine uitwijking.

Voorbeeld

Bereken

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(4x)}$$

Uitwerking:
De regel van De L'Hôpital geeft:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(4x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x)}{4\cos(4x)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Voorbeeld

Let wel steeds op of aan de voorwaarden van de regel van De L'Hôpital wel voldaan is.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)+1} = 0$$

omdat de teller naar 0 gaat en de noemer naar 1 gaat wanneer x nadert tot 0. Klakkeloos toepassen van de regel van De L'Hôpital levert een ander resultaat op:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\sin(2x)}{\frac{d}{dx}(\sin(3x)+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x)}{3\cos(3x)} = \frac{2}{3}$$

Maar aan de voorwaarden van de regel van De L'Hôpital is dan ook niet voldaan.

Voorbeeld

Bereken

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{x}$$

Uitwerking:
De regel van De L'Hôpital geeft:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\cos^2(2x)} = 2$$

Opgaven: Oefenen met de regel van De L'Hôpital

Vraag 1

Bereken

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} =$ ....

Vraag 2

Bereken

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}$$

$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} =$ ....

Vraag 3

Bereken

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(2x)}{x^2 - \pi^2}$$

$\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin(2x)}{x^2 - \pi^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$

Vraag 4

Bereken

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^7 - 1}{x^5 - 1}$$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^7 - 1}{x^5 - 1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$

Vraag 5

Bereken

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(5x)}{\tan(8x)}$$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(5x)}{\tan(8x)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$

Vraag 6

Bereken

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + 4x} - 1}{x}$$

door te substitueren $1 + 4x = t$

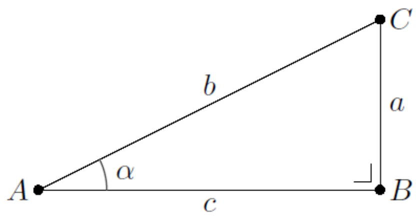
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + 4x} - 1}{x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$

Functies

Theorie: Goniometrie bij rechthoekige driehoeken

De **sinus**, **cosinus** en **tangens** kom je voor het eerst tegen als lengteverhoudingen tussen zijden van een rechthoekige driehoek. We recapituleren de definities.

De hoekpunten van driehoeken geven we met hoofdletters aan (als A, B, C. De lengte van de zijde BC, het lijnstuk tussen B en C tegenover het punt A, geven we aan met |BC| of met de kleine letter a. De grootte van de hoeken geven we aan met Griekse letters, zoals bijvoorbeeld α voor de hoek in A. We meten hoeken in het algmeen in graden, maar ook het gebruik van radialen is mogelijk. Zie onderstaande figuur van een rechthoekige driehoek (de hoek in B is 90°).



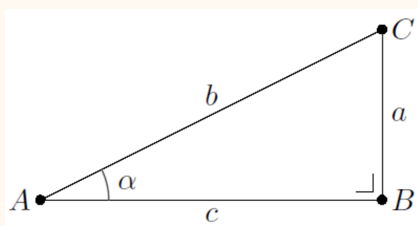
Stelling

Als A, B en C de hoekpunten zijn van een rechthoekige driehoek zoals hierboven getekend, dan geldt voor de hoek α in A:

$$\cos(\alpha) = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{c}{b}, \qquad \sin(\alpha) = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{a}{b} \qquad \text{en} \qquad \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{|BC|}{|AB|}\frac{a}{c}.$$

Voorbeeld

Bekijk een driehoek ABC met een hoek α in hoekpunt A en een rechte hoek in hoekpunt B zoals aangegeven in onderstaande figuur. Verder zijn gegeven de lengtes $b = 122$ en $c = 120$.



Bereken $\sin(\alpha)$.

Uitwerking: $\sin(\alpha) = \dfrac{11}{61}$

Om dit in te zien, gebruiken we $\sin(\alpha) = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{122}$. De lengte van BC berekenen we met de stelling van Pythagoras, die met onze letterkeuze gelijk is aan:

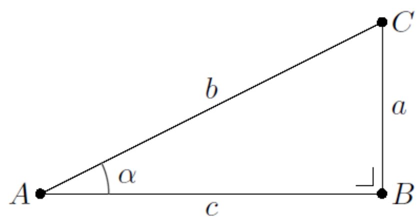
$$a^2 + c^2 = b^2$$

Dus: $a^2 = b^2 - c^2 = 122^2 - 120^2 = 484 = 22^2$, dus $a = 22$. We concluderen dat $\sin(\alpha) = \dfrac{22}{122} = \dfrac{11}{61}$.

Opgaven: Uitrekenen van goniometrische waarden

Vraag 1

Bekijk een driehoek ABC met een hoek α in hoekpunt A en een rechte hoek in hoekpunt B zoals aangegeven in onderstaande figuur. Verder zijn gegeven de lengtes $b = 106$ en $c = 56$.

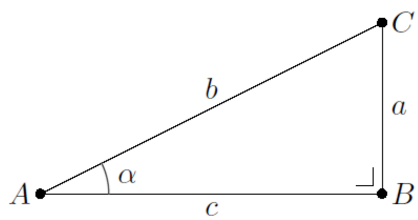


Bereken $\sin(\alpha)$.

$\sin(\alpha) =$ ....

Vraag 2

Bekijk een driehoek ABC met een hoek α in hoekpunt A en een rechte hoek in hoekpunt B zoals aangegeven in onderstaande figuur. Verder zijn gegeven de lengtes $a = 24$ en $c = 32$.

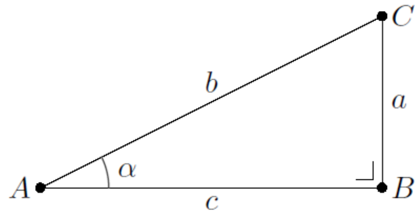


Bereken $\cos(\alpha)$.

$\cos(\alpha) =$ ....

Vraag 3

Bekijk een driehoek ABC met een hoek α in hoekpunt A en een rechte hoek in hoekpunt B zoals aangegeven in onderstaande figuur. Verder zijn gegeven de lengtes $b = 26$ en $c = 24$.



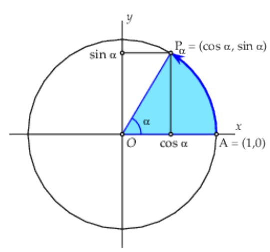
Bereken $\tan(\alpha)$ exact.

$\tan(\alpha) =$ ....

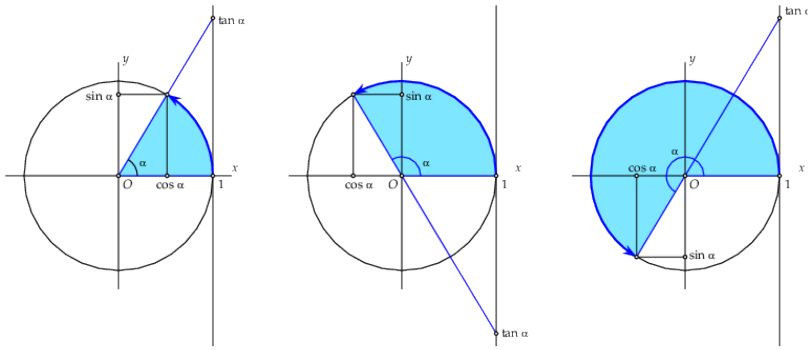
Theorie: Definities van goniometrische functies

De **sinus**, **cosinus** en **tangens** ben je tegengekomen als lengteverhoudingen tussen zijden van een rechthoekige driehoek. Maar nu bekijken we de hiermee gerelateerde sinusfunctie **sin**, cosinusfunctie **cos**, en tangensfunctie **tan**, d.w.z. functies gedefinieerd voor reële getallen en niet alleen voor scherpe hoeken in een driehoek. Voor de definitie van de **goniometrische functies sin**, **cos** en **tan** is het handig om de eenheidscirkel C, zijnde de cirkel met straal 1 en de oorsprong O als middelpunt, te gebruiken.

Laat A het punt $(1, 0)$ op C zijn en definieer voor elk positief getal α het punt P_α op C als het punt verkregen door A te verplaatsen langs de rand van de eenheidscirkel tegen de wijzers van de klok in over een afstand α. Het punt P_α heeft dan per definitie de coördinaten $\big(\cos(\alpha), \sin(\alpha)\big)$; voor de leesbaarheid laten we vaak wat haakjes weg en schrijven dan $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Onderstaande figuur visualiseert deze definitie. Voor elk negatief getal α kan eenzelfde definitie gemaakt worden met dien verstande dat de verplaatsing van het punt A dan met de wijzers van de klok mee is.



De tangensfunctie kan gedefinieerd worden als het quotiënt van de sinus- en cosinusfunctie, maar is ook m.b.v. de eenheidscirkel te visualiseren. Teken de verticale lijn door het punt $(1, 0)$ en snijd de verlegde straal met die lijn. De y-coördinaat van het snijpunt is dan $(1, \tan\alpha)$. In onderstaande figuur is de situatie voor verschillende waarden van α getekend.



Voorbeeld: Eigenschappen van goniometrische functies

Enkele eigenschappen van de goniometrische functies volgen bijna rechtstreeks uit de definities.

- Omdat het punt $P_\alpha = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ op de eenheidscirkel ligt, geldt $x_{P_\alpha}^2 + y_{P_\alpha}^2 = 1$, dus:
$$\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$$
- Omdat de omtrek van de eenheidscirkel gelijk is aan 2π, geldt dat de functies periodiek zijn, d.w.z. de eigenschap hebben dat ze na een zeker interval zichzelf beginnen te herhalen. Voor de sinus- en cosinusfunctie heeft dit interval de lengte 2π en men spreekt van **periodieke functies** met **periode** 2π; de tangensfunctie heeft periode π:
$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha), \quad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha), \quad \tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$$
- Uit de definitie volgen direct de volgende **symmetrie-eigenschappen**:
spiegeling om de horizontale as leidt tot
$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha), \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha), \quad \tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$
spiegeling om verticale as leidt tot
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha), \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha), \quad \tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$$
en spiegeling om de schuine lijn leidt tot $y = x$
$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) = \cos(\alpha), \quad \cos(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) = \sin(\alpha), \quad \tan(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$$
- Uit de definitie volgt ook onmiddellijk dat het bereik van de sinus- en cosinusfunctie gelijk is aan het segment [-1,1] en dat het domein bestaat uit alle reële getallen. Het bereik van de tangensfunctie bestaat uit alle reële getallen en het domein uit alle reële getallen behalve de getallen die gelijk zijn aan $\frac{1}{2}\pi$ modulo π.

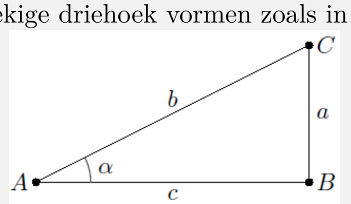
Voorbeeld: Enkele functiewaarden

Enkele domeinwaarden hebben bijzondere waarden voor de sinus-, cosinus- en tangensfunctie die je uit het hoofd moet kennen, dan wel in een mum van tijd en inspanning kunt afleiden met m.bv. de stelling van Pythagoras:

α	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$

Meer

Stel dat je de functiewaarden $\sin(\frac{1}{6}\pi)$, $\cos(\frac{1}{6}\pi)$ en $\tan(\frac{1}{6}\pi)$ wilt uitreken. Dan hoort hierbij een punt C op de eenheidscirkel dat samen met de oorsprong (aangeduid met de letter A) en de verticale projectie van C op de horizontale as (aangeduid met de letter B), de hoekpunten van een rechthoekige driehoek vormen zoals in onderstaande figuur



met $b = 1$ en $a = \dfrac{1}{2}$. Uit de stelling van Pythagoras volgt dan $c^2 = b^2 - a^2 = \dfrac{3}{4}$ en dus $c = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Per definitie geldt dan

$$\cos(\tfrac{1}{6}\pi) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \qquad \sin(\tfrac{1}{6}\pi) = \tfrac{1}{2} \qquad \text{en} \qquad \tan(\tfrac{1}{6}\pi) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Met de symmetrie-eigenschappen kun je dan ook andere speciale functiewaarden uitrekenen.

Voorbeeld

Als je de waarden van de cosinus en de sinus weet voor de speciale domeinwaarden tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$, dan kun je de waarden van speciale waarden tussen $\frac{1}{2}\pi$ en 2π berekenen door gebruik te maken van symmetrie-eigenschappen.

Gegeven $\cos(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, wat is dan $\cos(\frac{5}{4}\pi)$?
Uitwerking: De gegeven domeinwaarden zijn aan elkaar gerelateerd via de spiegeling aan de x-as en de y-as, dus geldt

$$\cos(\tfrac{5}{4}\pi) = -\cos(\tfrac{1}{4}\pi) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Voorbeeld

Als $t = \frac{23}{6}\pi$ en we bovenstaande stappen volgen, dan vinden we

$$\begin{array}{rcll}
\cos(\frac{23}{6}\pi) & = & \cos(\frac{23}{6}\pi - 4\pi) \;=\; \cos(-\frac{1}{6}\pi) & \text{periode } 2\pi \\
 & = & \cos(\frac{1}{6}\pi) & \text{spiegeling } x\text{-as} \\
 & = & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \text{speciale waarde}
\end{array}$$

Voorbeeld: Strategie voor het berekenen van goniometrische functiewaarden.

Voor domeinwaarden die niet binnen $[0, 2\pi]$ liggen, gebruik je dus eerst het periodieke gedrag van de goniometrische functies om de bepaling van een functiewaarde van sinus of cosinus terug te brengen tot een probleem op het domein $[0, 2\pi]$. Hierna kun je spiegelsymmetrie toepassen om de bepaling van een functiewaarde terug te brengen tot een probleem op het domein $[0, \frac{1}{2}\pi]$ (of zelfs tot $[0, \frac{1}{4}\pi]$ als je dat zou willen).

Opgaven: Berekenen van functiewaarden

Vraag 1

Als je de waarden van de cosinus en de sinus weet voor de speciale domeinwaarden tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$, dan kun je de waarden van speciale waarden tussen $\frac{1}{2}\pi$ en 2π berekenen door gebruik te maken van symmetrie-eigenschappen.

Gegeven $\sin(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, wat is dan $\sin(\frac{3}{4}\pi)$?

$\sin(\frac{3}{4}\pi) =$ ....

Vraag 2

Bereken de exacte waarde van $\cos(\frac{2}{3}\pi)$ met behulp van onderstaande tabel en geschikt gekozen symmetrieën van de eenheidscirkel.

α	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$

$\cos(\frac{2}{3}\pi) =$ ....

Vraag 3

Bereken de exacte waarde.van $\cos(-\frac{5}{4}\pi)$ met behulp van onderstaande tabel en geschikt gekozen symmetrieën van de eenheidscirkel.

α	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$

$\cos(-\frac{5}{4}\pi) =$ ....

Vraag 4

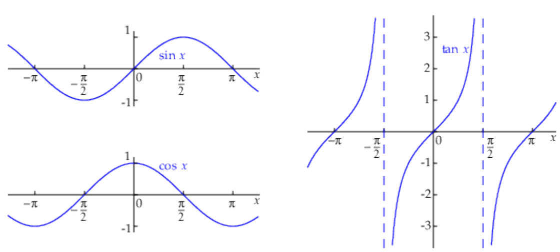
Bereken de exacte waarde.van $\cos(-9\pi)$ met behulp van onderstaande tabel en geschikt gekozen symmetrieën van de eenheidscirkel.

α	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$

$\cos(-9\pi) =$ ....

Theorie: Grafieken van goniometrische functies

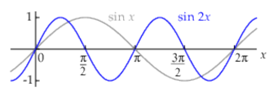
Hieronder zijn de grafieken getekend van de functies $\sin(x)$, $\cos(x)$ en $\tan(x)$.
Deze functies zijn periodiek: voor de sinus- en cosinusfunctie is de periode gelijk 2π en voor de tangensfunctie is de periode gelijk aan π.

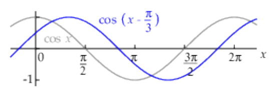


Onderstaande visualisatie is bedoeld om meer inzicht in de grafiek van de sinus- en cosinusfunctie te krijgen. Klik op de `Start/Stop` knop om een animatie te starten en te stoppen. Je kunt ook met de muis het punt op de eenheidscirkel bewegen.

Hieronder staan voorbeelden getekend van twee veelgebruikte transformaties. In de bovenste van de twee figuren vind je behalve de grafiek van de functie $\sin(x)$ ook die van $\sin(2x)$. De sinusgrafiek is in horizontale richting als het ware met een factor 2 samengedrukt. De periode is twee maal zo klein geworden: π i.p.v. 2π.

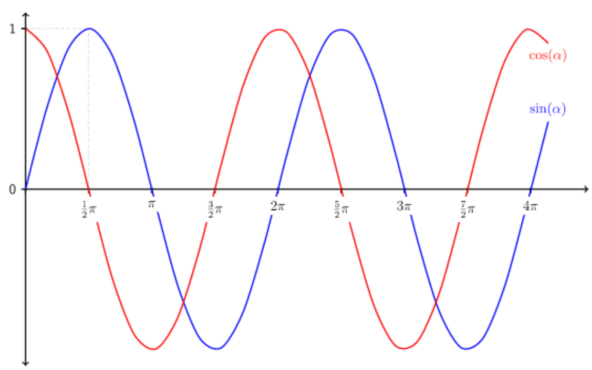
De onderste tekening toont naast de grafiek van $\cos(x)$ ook die van de functie $\cos(x - \dfrac{\pi}{3})$. De cosinusgrafiek is nu in horizontale richting over een afstand van $\dfrac{\pi}{3}$ naar rechts verschoven.





Opgaven: Werken met grafieken

Vraag 1



In bovenstaande grafiek zie je de waarden van $\sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha)$ uitgezet tegen α. Je ziet meteen dat de sinus en cosinus dezelfde vorm hebben maar niet in de pas lopen. Dat betekent dat er een getal ϕ bestaat, de **fase**, zodat je kunt schrijven $\sin(\alpha + \phi) = \cos(\alpha)$ en $\cos(\alpha - \phi) = \sin(\alpha)$. Wat is de grootte van de fase in dit geval?

a. $\phi = \frac{1}{4}\pi$

b. $\phi = \frac{1}{2}\pi$

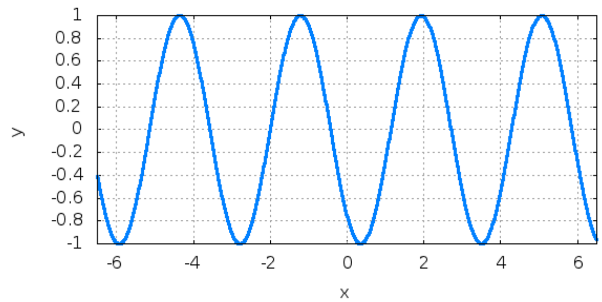
c. $\phi = \pi$

d. $\phi = \frac{3}{2}\pi$

e. $\phi = 2\pi$

Vraag 2

Welke goniometrische formule past bij onderstaande grafiek?



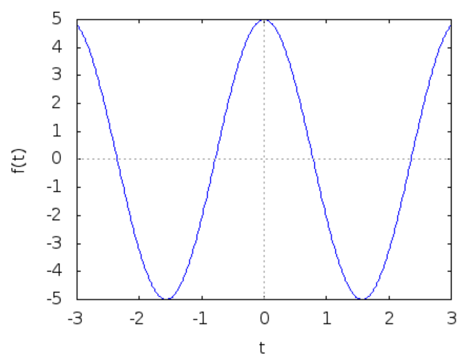
a. $\sin(2x-4)$

b. $\sin(2x+4)$

c. $\cos(2x+4)$

d. $\cos(2x-4)$

Vraag 3



De functie f waarvan hierboven de grafiek staat, is bepaald door de regel

$$f(t) = a \cdot \sin\left(b \cdot t + c \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

De parameters a, b, and c zijn in dit geval gehele getallen met $a > 0$ en $0 \leq c \leq 3$. Bepaal ze.

$a =$ ....

$b =$ ....

$c =$ ....

Theorie: Optelformules, dubbele-hoekformules, etc.

Voorbeeld: Optelformules

De volgende twee **optelformules** horen ook tot de fundamentele gonioformules, maar je hoeft ze niet uit het hoofd te kennen:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Voorbeeld: Dubbele-hoekformules

Vervanging van β door α in de optelformules geeft de volgende **dubbele-hoekformules**

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2\\ &= 2\cos(\alpha)^2 - 1\\ &= 1 - 2\sin(\alpha)^2\end{aligned}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan(\alpha)^2}$$

De eerste twee dubbele-hoekformules moet je wel uit het hoofd kennen.

Voorbeeld: Aftrekformules

Vervanging van β door $-\beta$ in de optelformules geeft

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Deze formules hoef je niet uit het hoofd te kennen, net zo min als onderstaande formules.

Voorbeeld: Productformules

Combinatie van eerdere formules geeft de volgende productformules voor sinus en cosinus:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \tfrac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\big)$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \tfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big)$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \tfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\big)$$

Voorbeeld: Som- en verschilformules

Ook kunnen de volgende formules voor optelling en verschil van goniometrische functies afgeleid worden:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Deze formules zijn ook te gebruiken om speciale functiewaarden uit te rekenen.

Voorbeeld

Gebruik de optelformules om $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ te berekenen.

Uitwerking: $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

Uitwerking

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Alternatieve manieren om één twaalfde op te splitsen:

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{5}{12}-\frac{1}{3}=\frac{7}{12}-\frac{1}{2}.$$

Je kunt deze opgave dus op verschillende manieren oplossen, maar het resultaat is natuurlijk altijd hetzelfde.

Opgaven: Rekenen met goniometrische formules

Vraag 1.1

Bereken $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ met behulp van één van de optelformules.

$\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) =$ ....

Vraag 1.2

Bereken $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ met behulp van één van de optelformules.

$\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) =$ ....

Vraag 2

De dubbele-hoekformules $\cos(2\alpha) = 2\cos(\alpha)^2 - 1 = 1 - 2\sin(\alpha)^2$ kun je ook gebruiken om $\sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha)$ te berekenen als je $\cos(2\alpha)$ al kent:

$$\sin(\alpha) = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\big(1-\cos(2\alpha)\big)} \quad \text{en} \quad \cos(\alpha) = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\big(1+\cos(2\alpha)\big)}$$

Het juiste teken moet je bepalen door na te gaan in welk gebied van het domein het argument zit.
Gebruik bovenstaande formules, en eventueel ook de optelformules, bij de volgende twee onderdelen.

$\cos(\frac{11}{8}\pi) =$ ....

$\sin(\frac{5}{8}\pi) =$ ....

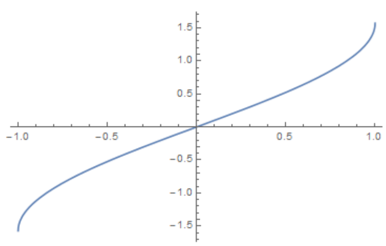
Theorie: De arcsinus, arccosinus en arctangens

Wanneer we weten dat $\sin(x) = \frac{1}{2}$, dan zijn er voor x nog oneindig veel mogelijkheden open. De sinus is namelijk een periodieke functie, en bovendien wordt elke waarde tusse -1 en 1 gedurende één periode tweemaal aangenomen. Zo geldt $\sin(x) = \frac{1}{2}$ als $x = \frac{1}{6}\pi$ en $x = \frac{5}{6}\pi$ en bij elke van die waarden kunne we nog een willekeurig veelvoud van 2π optellen. Al die keuzemogelijkheden verdwijnen echter wanneer we afspreken dat we x beperken tot het interval $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, dat wil zeggen $[-\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \ \frac{1}{2}\pi$.

Op het interval het interval $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ is de sinusfunctie monotoon stijgend en wordt elke functiewaarde maar eenmaal aangenomen. Beperkt tot dit interval bestaat er daarom een inverse van de sinsusfunctie en die noemen we de arcsinus. We noteren deze functie als $x \mapsto \arcsin(x)$. Er geldt:

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi]$$

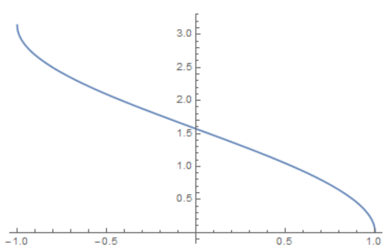
en de grafiek van arcsin ziet er als volgt uit:



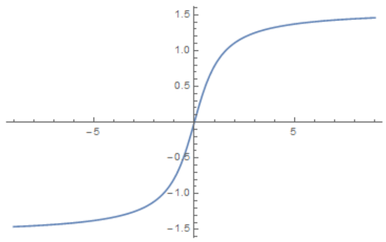
Beschouw de cosinusfunctie op het interval $[0, \pi]$, waar de functie monotoon dalend is. Beperkt tot dit interval bestaat er daarom een inverse,
de arccosinus. We noteren deze functie als $x \mapsto \arccos(x)$. Domein en bereik zijn als volgt:

$$\arccos : [-1, 1] \ \longrightarrow [0, \pi]$$

en de grafiek van arccos ziet er als volgt uit:



Tenslotte is de tangens monotoon op het interval $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Dit interval wordt afgebeeld op $\mathbb{R}$. De inverse functie, die dus de hele lijn $\mathbb{R}$ afbeeldt op het begrensde open interval $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, heet de arctangens. We noteren deze functie als $x \mapsto \arctan(x)$ en de grafiek ziet er als volgt uit:



Merk op dat geldt:

$$\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{en} \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$$

Op basis van bovenstaande definities geldt:

$$\begin{aligned} x = \arcsin(y) &\iff y = \sin(x) \quad \text{en} \quad -\tfrac{1}{2}\pi \le x \le \tfrac{1}{2}\pi \\ x = \arccos(y) &\iff y = \cos(x) \quad \text{en} \quad 0 \le x \le \pi \\ x = \arctan(y) &\iff y = \tan(x) \quad \text{en} \quad -\tfrac{1}{2}\pi \le x \le \tfrac{1}{2}\pi \end{aligned}$$

Opgaven: Berekenen van functiewaarden

Vraag 1

Bereken exact:

$$\arccos\bigl(-1\bigr)$$

$\arccos\bigl(-1\bigr) =$ ....

Vraag 2

Bereken exact:

$$\arcsin\bigl(\sin(\tfrac{2}{3}\pi)\bigr)$$

$\arcsin\bigl(\sin(\tfrac{2}{3}\pi)\bigr) =$ ....

Vraag 3

Bereken exact:

$$\tan\bigl(\arctan(\frac{3}{4})\bigr)$$

$\tan\bigl(\arctan(\frac{3}{4})\bigr) =$ ....

Theorie: Definitie en basiseigenschappen

Een machtsfunctie in x bestaat uit een macht x^p, voor zeker getal p. De kwadraatfunctie met functievoorschrift x^2 is een eenvoudig voorbeeld. Een exponentiële functie bestaat ook uit een macht, maar in dit geval staat de onafhankelijke variabele x in de exponent, bijvoorbeeld zoals in het functievoorschrift 2^x:

Definitie

Een functie van de vorm $f(x) = a^x$ voor $a > 0, a \neq 1$ heet een **exponentiële functie** met **grondtal** a.

Meer

We laten zien hoe a^x gedefinieerd wordt, voor positieve getallen a. Als n een positief geheel getal is, wordt a^n verkregen door n kopieën van a met elkaar te vermenigvuldigen. Verder laten we $a^0 = 1$ en $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. Voor een positief geheel getal q, is $b \mapsto b^q$ stijgend in b. Voor gegeven a bestaat er dus een getal b waarvoor $b^q = a$. We schrijven $a^{\frac{1}{q}} = b$. Voor gehele getallen p en $q > 0$, is nu $a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$ ook gedefinieerd. Dus voor elke breuk $x = \dfrac{p}{q}$ is a^x nu gedefinieerd. Voor algemene reële getallen x wordt a^x gedefinieerd door continuïteit; als $\dfrac{p}{q}$ in de buurt van x ligt, dan ligt a^x in de buurt van $a^{\frac{p}{q}}$.
Neem bijvoorbeeld $2^{\sqrt{3}}$. Er geldt $1.73205 < \sqrt{3} < 1.73206$. We zien

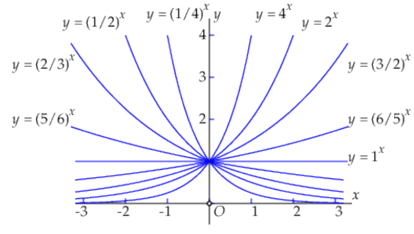
$$2^{\frac{17}{10}} < 2^{\frac{173}{100}} < 2^{\frac{1732}{1000}} < 2^{\frac{17320}{10000}} < 2^{\frac{173205}{100000}} < 2^{\sqrt{3}}$$

en ook

$$2^{\sqrt{3}} < 2^{\frac{173206}{100000}} < 2^{\frac{17321}{10000}} < 2^{\frac{1733}{1000}} < 2^{\frac{174}{100}} < 2^{\frac{18}{10}}.$$

Zo wordt $2^{\sqrt{3}}$ ingesloten door al gedefinieerde getallen van de vorm $2^{\frac{p}{q}}$ die $2^{\sqrt{3}}$ steeds beter benaderen.

In onderstaande figuur is voor enige waarden van a de grafiek van a^x getekend.



Het getal $a = 1$ doet niet mee in de definitie van een exponentiële functie omdat $1^x = 1$ voor alle x en je zo'n functie eerder een constantie functie of lineaire functie zou noemen. Om formuleringen van eigenschappen van exponentiële functies te vergemakkelijken zullen we toch 1 als grondtal accepteren.

Door de slider in onderstaande figuur te bewegen krijg je een idee hoe de grafiek van de exponentiële functie

$$f(x) = a^x$$

er uit ziet voor verschillende waarden van het grondtal a.

Voorbeeld: Eigenschappen

Enkele eigenschappen van een exponentiële functie $f(x) = a^x$:

- $f(0) = 1$ (elke grafiek van een exponentiële functie gaat door het punt (0,1)).

- $f(x) > 0$ voor alle x.

- f is stijgend dan en slechts dan als $a > 1$. Hoe groter a, hoe sneller de functie stijgt.

- f is dalend dan en slechts dan als $0 < a < 1$. Hoe dichter a bij 0 ligt, hoe sneller de functie daalt.

- De horizontale as treedt voor elke exponentiële functie op als horizontale asymptoot. Als $0 < a < 1$, dan zijn functiewaarden a^x voor grote positieve x klein (in wiskundetaal: $a^x \to 0$ als $x \to \infty$, of nog formeler $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0$). Als $a > 1$, dan $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$.

Voorbeeld: Rekenregels

De rekenregels voor machten, die we eerder voor rationale getallen tegengekomen zijn, blijven geldig voor exponentiële functies. Zo geldt voor elke positieve a en b en voor alle reële getallen x en y

$$a^x \times a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \times y}$$

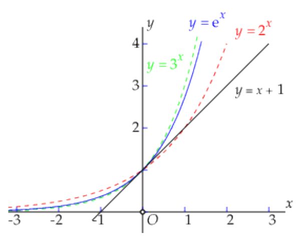
$$(a \times b)^x = a^x \times b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

We zullen exponentiële functies en hun gedrag grondig bestuderen in wiskundige modellen van veranderingsprocessen, zoals bijvoorbeeld de wiskundige modellering van radioactief verval of het concentratieverloop van een farmacon in een lichaam bij inname en afbraak van een medicijn. Hier gaan we alleen nog verder in op een speciale exponentiële functie, zeg maar de moeder van alle exponentiële functies.

Theorie: Dé exponentiële functie e^x

Tussen het grondtal $a = 2$ en het grondtal $a = 3$ zit precies één grondtal, dat we met e aanduiden, zodanig dat de grafiek van $f(x) = e^x$ en de rechte lijn met vergelijking $y = x + 1$ elkaar raken in het punt $(0, 1)$.



De waarde van dit getal is ongeveer

$$e \approx 2.71828$$

De exacte waarde kan geïntroduceerd worden als

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

of als

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

De exponentiële functie $f(x) = e^x$ komt zo vaak voor, dat deze wel **dé exponentiële functie** wordt genoemd. In boeken, computerprogramma's en rekenmachines kom je ook wel de notatie $\exp(x)$ als synoniem voor e^x tegen.

Van de exponentiële functie met functievoorschrift e^x kunnen we andere exponentiële functies maken door het argument x met een constante c te vermenigvuldigen; we krijgen dan een functie van de volgende vorm

$$f(x) = e^{c \cdot x}$$

Dit is een exponentiële functie met grondtal e^c; er geldt immers

$$f(x) = e^{c \cdot x} = (e^c)^x = a^x$$

met $a = e^c$.

Voorbeeld: Eigenschappen

De vertaling van de eerder genoemde eigenschappen van exponentiële functies voor de exponentiële functie $f(x) = e^{c \cdot x}$ is als volgt:

- $f(0) = 1$.
- $f(x) > 0$ voor alle x.
- f is stijgend dan en slechts dan als $c > 0$. Hoe groter c, hoe sneller de functie stijgt.
- f is dalend dan en slechts dan als $c < 0$. Hoe negatiever c, hoe sneller de functie daalt.
- De horizontale as treedt voor elke exponentiële functie op als horizontale asymptoot. Voor $c < 0$ geldt: $e^{cx} \to 0$ als $x \to \infty$. Voor $c > 0$ geldt: $e^{c \cdot x} \to 0$ als $x \to -\infty$.

Ter illustratie geven we nog een dynamisch voorbeeld van vereenvoudigingen met e-machten:

Voorbeeld

Vereenvoudig de uitdrukking $\dfrac{2e^{2x}}{(e^{2x})^4}$ tot de vorm $b \cdot e^{c \cdot x}$.

Uitwerking:

$$\begin{aligned} \frac{2e^{2x}}{(e^{2x})^4} &= \frac{2 \cdot e^{2 \cdot x}}{(e^{2 \cdot x})^4} \\ &= \frac{2 \cdot e^{2 \cdot x}}{e^{4 \cdot 2 \cdot x}} \\ &= \frac{2 \cdot e^{2 \cdot x}}{e^{8 \cdot x}} \\ &= 2 \cdot e^{2 \cdot x} \cdot e^{-8 \cdot x} \\ &= 2 \cdot e^{2 \cdot x - 8 \cdot x} \\ &= 2 \cdot e^{-6 \cdot x} \end{aligned}$$

Een kortere route krijg je bij herkenning van een gemeenschappelijke deeluitdrukking e^{2x}

in teller en noemer, die weggedeeld kan worden:

$$\frac{2e^{2x}}{\left(e^{2x}\right)^4} = \frac{2}{\left(e^{2\cdot x}\right)^3}$$

$$= \frac{2}{e^{3\cdot 2\cdot x}}$$

$$= \frac{2}{e^{6\cdot x}}$$

$$= 2\cdot e^{-6\cdot x}$$

Opgaven: Vereenvoudigen van exponentiële uitdrukkingen

Vraag 1

Vereenvoudig de uitdrukking $\frac{12e^{6x}}{3e^{3x}}$ tot de vorm $b\cdot e^{c\cdot x}$.

$\frac{12e^{6x}}{3e^{3x}} =$ ....

Vraag 2

Vereenvoudig de uitdrukking $\frac{3e^{2x}}{\left(e^{2x}\right)^3}$ tot de vorm $b\cdot e^{c\cdot x}$.

$\frac{3e^{2x}}{\left(e^{2x}\right)^3} =$ ....

Vraag 3

Vereenvoudig de uitdrukking $\left(e^{6x}\right)^3\cdot\left(e^{3x}\right)^{-2}$ tot de vorm $b\cdot e^{c\cdot x}$.

$\left(e^{6x}\right)^3\cdot\left(e^{3x}\right)^{-2} =$ ....

Theorie: De natuurlijke logaritme

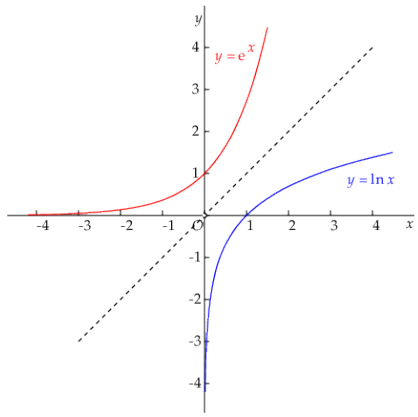
Als y een positief reëel getal is, dan volgt uit de grafiek van de exponentiële functie dat de vergelijking $e^x = y$ precies één oplossing heeft. Deze oplossing noteren we als $\ln(y)$, waarbij **ln** een afkorting is voor **natuurlijke logaritme**.

Bijvoorbeeld, de vergelijking $e^x = 2$ heeft als oplossing $x = \ln(2)$.
Per definitie geldt dus

$$\ln(y) = x \iff y = e^x$$

De natuurlijke logaritme is hiermee gedefinieerd als functie $f(x) = \ln(x)$ voor positieve gehele getallen. De grafiek van de natuurlijke logaritme is kun je verkrijgen door de grafiek van de exponentiële functie in de lijn $y = x$ te spiegelen want deze functies zijn elkaars inverse, d.w.z.

$$e^{\ln(x)} = \ln(e^x) = x$$



Voorbeeld: Rekenregels

Uit de eigenschappen van de exponentiële functie kunnen eigenschappen van de natuurlijke logaritme worden afgeleid. Voor alle positieve reële getallen x en y, en voor elk rationaal getal r geldt

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\ln(x^r) = r \cdot \ln(x)$$

$$\ln(1) = 0$$

Meer

Als voorbeeld van zo'n afleiding van een rekenregel bekijken we de eerste.

We weten op basis van rekenregels voor exponentiële functies al dat

$$e^{\ln(x)} \cdot e^{\ln(y)} \;= e^{\ln(x)+\ln(y)}$$

Anderzijds geldt per definitie voor het linkerlid dat

$$e^{\ln(x)} \cdot e^{\ln(y)} = x \cdot y = e^{\ln(x \cdot y)}$$

De combinatie van deze twee gelijkheden levert op:

$$e^{\ln(x \cdot y)} = e^{\ln(x)+\ln(y)}$$

Gelijkstelling van de exponenten geeft dan de rekenregel

$$\ln(x \cdot y) \;= \ln(x + y)$$

Ter illustratie van de rekenregels geven we een voorbeeld van consequent toepassen van de regels om een vereenvoudiging te bewerkstelligen.

Voorbeeld

Schrijf de uitdrukking $\ln(384) - 3\ln(2)$ als één natuurlijke logaritme $\ln(\ldots)$.
Uitwerking: Toepassing van rekenregels voor logaritmen leidt tot de volgende vereenvoudiging:

$$\begin{aligned} \ln(384) - 3\ln(2) &= \ln(384) - \ln(2^3) \\ &= \ln(384) - \ln(8) \\ &= \ln\left(\frac{384}{8}\right) \\ &= \ln(48) \end{aligned}$$

Voorbeeld: Extraatje: het grondtal e als limiet

Nu we de natuurlijke logaritme ingevoerd hebben en vooruitlopend op de kennis dat de afgeleide van $\ln(x)$ gelijk is aan $\dfrac{1}{x}$ kunnen we ook wel bewijzen dat

$$e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$$

Immers:

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$$

Het volstaat dus om te bewijzen dat

$$\lim_{n\to\infty} n\ln(1 + \frac{1}{n}) = 1$$

Welnu:

$$\lim_{n\to\infty} n\ln(1+\frac{1}{n}) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = 1$$

In de voorlaatste stap hebben we de regel van De L'Hôpital toegepast.

Theorie: Logaritmische functies

Als y een positief reëel getal is, dan volgt uit de grafiek van de exponentiële functie $f(x) = g^x$ met grondtal g dat de vergelijking $g^x = y$ precies één oplossing heeft. Deze oplossing noteren we als ${}^g\log(y)$, waarbij ${}^g\log$ een afkorting is voor de **logaritme met grondtal** g.

Bijvoorbeeld, de vergelijking $10^x = 2$ heeft als oplossing $x = {}^{10}\log(2) \approx 0.301$.
Per definitie geldt dus

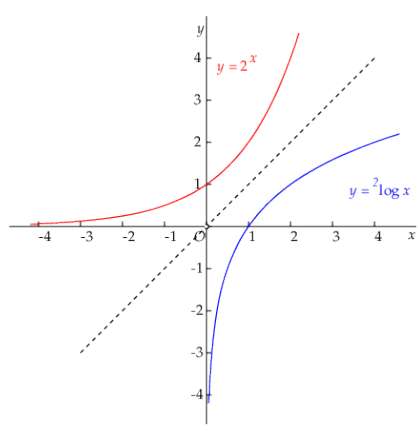
$${}^g\log(y) = x \iff y = g^x$$

Hiermee is de **logaritmische functie** met grondtal g gedefinieerd als functie $f(x) = {}^g\log(x)$ voor positieve gehele getallen.
De **logaritmische vergelijking** ${}^g\log(x) = c$ heeft als oplossing $x = g^c$. Immers: ${}^g\log(g^c) = c$.

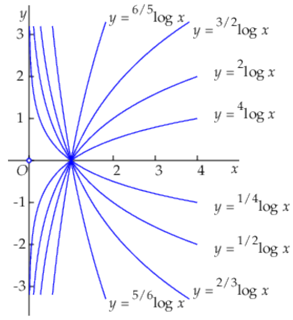
In plaats van ${}^g\log(x)$ wordt ook wel de notatie $\log_g(x)$ gebruikt.
Verder geldt: $\ln(x) = {}^e\log(x)$. Wiskundigen schrijven ook vaak log in plaats van ${}^e\log$ of ln. In de natuurwetenschappen wordt daarentegen log meestal gebruikt als afkorting voor ${}^{10}\log$. Kortom, als je log ziet staan in een formule, dan is het raadzaam je te realiseren welk grondtal gebruikt wordt door de auteur.

De grafiek van deze logaritmische functie kun je verkrijgen door de grafiek van de exponentiële functie $f(x) = g^x$ in de lijn $y = x$ te spiegelen want deze functies zijn elkaars inverse, d.w.z.

$$g^{{}^g\log(x)} = {}^g\log(g^x) = x$$



In onderstaande figuur zijn de grafieken van enkele logaritmische functies getekend



Voorbeeld: Eigenschappen

Enkele eigenschappen van een logaritmische functie $f(x) = {}^g\log(x)$:

- $f(1) = 0$ (elke grafiek van een logaritmische functie gaat door het punt (1,0)).
- $f(x) > 0$ voor alle $x > 1$ in het geval dat $g > 1$. Bovenstaande grafieken illustreren soortgelijke beweringen.
- f is stijgend dan en slechts dan als $g > 1$. Hoe groter g, hoe minder snel de functie stijgt.
- f is dalend dan en slechts dan als $0 < g < 1$. Hoe dichter a bij 1 ligt, hoe sneller de functie daalt.
- De verticale as treedt voor elke logaritmische functie op als verticale asymptoot. Als $0 < g < 1$, dan zijn functiewaarden ${}^g\log(x)$ voor kleine positieve x groot (in wiskundetaal: ${}^g\log(x) \to \infty$ als $x \downarrow 0$, of nog formeler $\lim\limits_{x\downarrow 0} {}^g\log(x) = \infty$). Als $g > 1$, dan $\lim\limits_{x\downarrow 0} {}^g\log(x) = -\infty$.

In het speciale geval dat het grondtal g gelijk is aan e, dan is de logaritmische functie gelijk aan de natuurlijke logaritme:

$$ {}^e\log(x) = \ln(x) $$

Voorbeeld: Rekenregels

De rekenregels voor de natuurlijke logaritme, die we eerder tegengekomen zijn, gelden voor logaritmische functie met elk grondtal. Uit de eigenschappen van exponentiële functies kunnen ze worden afgeleid. Voor alle positieve reële getallen x en y, voor alle grondtallen a en b, en voor elk rationaal getal r geldt

$$ {}^a\log(x \cdot y) = {}^a\log(x) + {}^a\log(y) $$

$$ {}^a\log\left(\frac{x}{y}\right) = {}^a\log(x) - {}^a\log(y) $$

$$ {}^a\log(x^r) = r \cdot {}^a\log(x) $$

$$ {}^a\log(x) = \frac{{}^b\log(x)}{{}^b\log(a)} $$

Met de laatste formule kun je logaritmen met grondtal a omzetten en logaritmen met een ander grondtal. Bijvoorbeeld:

$$^{10}\log(x) = \frac{^{e}\log(x)}{^{e}\log(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Ter illustratie van de rekenregels geven we een voorbeeld van consequent toepassen van de regels om een herleiding tot een goed einde te brengen.

Voorbeeld

Gegeven is het verband $^{10}\log(y) = -3 - \dfrac{3}{2} \cdot {}^{10}\log(x)$.
Druk y uit als functie van x en vereenvoudig zodanig dat er geen logaritme meer voor komt.
Uitwerking: Voor het gemak gebruiken we log i.p.v. $^{10}\log$, d.w.z. als notatie voor de logaritme met grondtal 10.
We schrijven eerst het rechterlid van de gegeven formule als een logaritme met grondtal 10:

$$-3 - \frac{3}{2} \cdot \log(x) = \log(10^{-3}) + \log(x^{-\frac{3}{2}}) = \log(10^{-3} \cdot x^{-\frac{3}{2}})$$

Dus:

$$\log(y) = \log(10^{-3} \cdot x^{-\frac{3}{2}})$$

Hieruit volgt:

$$y = 10^{-3} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = 0.001 \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

We zullen logaritmische functies intensief gebruiken wanneer we wiskundige modellen van groei bestuderen en, meer algemeen, wanneer we wiskundige modellen van veranderingsprocessen, zoals bijvoorbeeld radioactief verval of het concentratieverloop van een farmacon in een lichaam, bekijken.

{}^a\!\log(x)

Opgaven: Werken met logaritmen

Vraag 1

Schrijf de uitdrukking $\ln(4374) - 3\ln(3)$ als één natuurlijke logaritme $\ln(\ldots)$.

$\ln(4374) - 3\ln(3) =$ ....

Vraag 2

Bereken exact en zonder rekenmachine de logaritme $^{4}\log(64)$

$^{4}\log(64) =$ ....

Vraag 3

Los de vergelijking ${}^{5}\log(2x+5) = 3$ algebraïsch op.

$x =$ ....

Vraag 4

Gegeven is het verband ${}^{10}\log(y) = 3 + \frac{1}{2} \cdot {}^{10}\log(x)$.
Druk y uit als functie van x en vereenvoudig zodanig dat er geen logaritme meer voor komt.

$y =$ ....

Opgaven: Limieten met logaritmen

Vraag 1

Bereken

$$\lim_{x \downarrow 1} \ln(x-1)$$

$\lim_{x \downarrow 1} \ln(x-1) =$ ....

Vraag 2

Bereken

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{5n})^n$$

$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{5n})^n =$ ....

Vraag 3

Bereken

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^{2n}$$

$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^{2n} =$ ....

Afgeleiden

Theorie: Raaklijn en afgeleide

In toepassingen zijn we vaak geïnteresseerd in de manier waarop een grootheid verandert. Snelheid is een alledaags begrip en we maken daarbij onderscheid tussen *gemiddelde snelheid* en *momentane snelheid*. De gemiddelde snelheid van een bewegend voorwerp over een bepaald tijdsverloop is gelijk aan de snelheid van een eenparige beweging, zodanig dat over datzelfde tijdsverloop de verplaatsing dezelfde is. Deze gemiddelde snelheid kan afwijken van de momentane snelheid, d.w.z. de snelheid op een bepaald tijdstip. Laten we dit veralgemeniseren voor een grootheid $f(t)$ die van tijd t afhangt. Laten we hierbij de taal van wiskundige functies gebruiken.

Definitie

We bekijken een functie $f(t)$ over het tijdsinterval $a \leq t \leq b$. De **gemiddelde toenamesnelheid** van de functie over dit interval is te definiëren als het **differentiequotiënt**

$$\frac{\triangle f}{\triangle t} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

De grootheden $\triangle f$ en $\triangle t$ heten **differenties**. Het differentiequotiënt hangt dus af van de functiewaarden f op de randen van het tijdsinterval $[a, b]$, de lengte van het tijdsinterval en bijvoorbeeld het startmoment $t = a$.

Een triviale maar belangrijke eigenschap is dat de gemiddelde toenamesnelheid van de functie $f(t)$ over het tijdsinterval $a \leq t \leq b$ gelijk is aan de richtingscoëfficiënt van de lijn door de punten $\big((a, f(a)\big)$ en $\big(b, f(b)\big)$.

Als je nu het startmoment $t = a$ vast kiest, maar de lengte $\triangle t$ van het tijdsinterval steeds kleiner maakt, dan zal voor een 'nette' functie f het differentiequotiënt in de buurt van een zeker getal, zeg m, komen te liggen. Dit getal m is de **richtingscoëfficiënt** van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $\big(a, f(a)\big)$. Dit heeft te maken met het feit dat de grafiek van een 'nette' functie glad in (bijna) elk punt 'glad' is, d.w.z. in (bijna) elk punt bij sterk inzoomen op een rechte lijn lijkt. Deze rechte lijn heet de **raaklijn** in het beschouwde punt.

Voorbeeld

Voor de kwadratische functie $f(t) = 3t^2 - 2t - 1$ berekenen we het differentiequotiënt over de tijdsintervallen $[1, 1.1]$, $[1, 1.01]$, $[1, 1.001]$ en $[1, 1.0001]$

$$\triangle t = 0.1 \qquad \frac{\triangle f}{\triangle t} = \frac{f(1.1) - f(1)}{0.1} = \frac{0.433 - 0}{0.1} = 4.3$$

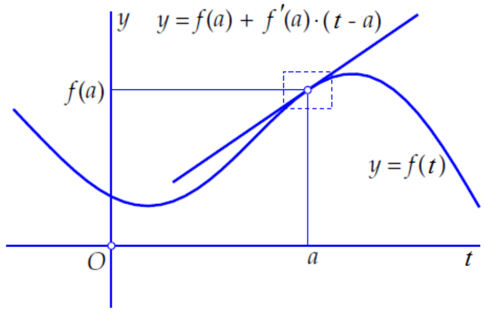
$$\triangle t = 0.01 \qquad \frac{\triangle f}{\triangle t} = \frac{f(1.01) - f(1)}{0.01} = \frac{0.0403 - 0}{0.01} = 4.03$$

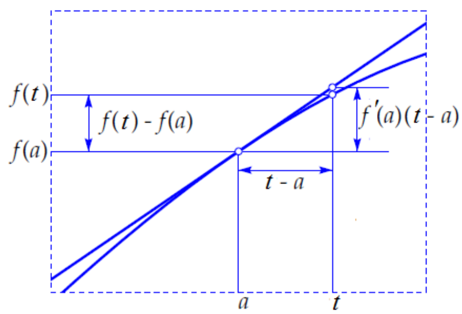
$$\triangle t = 0.001 \qquad \frac{\triangle f}{\triangle t} = \frac{f(1.001) - f(1)}{0.001} = \frac{0.004003 - 0}{0.001} = 4.003$$

$$\triangle t = 0.0001 \qquad \frac{\triangle f}{\triangle t} = \frac{f(1.0001) - f(1)}{0.0001} = \frac{0.00040003 - 0}{0.0001} = 4.0003$$

Je vermoedt nu wel dat $\dfrac{\Delta f}{\Delta t} \to 4$ op het tijdsinterval $1, 1+\Delta t$ als $t \to 0$. We zullen dit later verifiëren.

Hieronder is de grafiek van een nette functie $f(t)$ getekend, met daarbij ook de raaklijn in het punt $(a, f(a))$. Vlak in de buurt van dit punt zijn de grafiek en de raaklijn nauwelijks van elkaar te onderscheiden. Als illustratie hiervan is het rechthoekje rond het punt $(a, f(a))$ in de figuur eronder nog eens vergroot weergegeven.





Voor t vlak bij a geldt blijkbaar

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a} \approx \frac{m \cdot (t-a)}{t-a} = m$$

Preciezer geformuleerd:

$$m = \lim_{t\to a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$$

Men noemt m de **afgeleide** van $f(t)$ in a en noteert dit met $f'(a)$ en met $\dfrac{df}{dt}(a)$.

De vergelijking van de raaklijn in het punt $(a, f(a))$ is gelijk aan

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (t-a).$$

Voor t in de buurt van a geldt dus:

$$f(t) \approx f(a) + f'(a) \cdot (t-a).$$

Dit betekent ook dat als de functiewaarde en afgeleiden voor een zekere t bekend is, men ook functiewaarden op afstand dt goed kan schatten met de volgende formule:

$$f(t+dt) \approx f(t) + f'(t) \cdot dt.$$

Hoe dichter in de buurt van t (ofwel hoe kleiner de tijdstap dt), des te beter is de schatting van de functiewaarde.

Voor t in de buurt van a geldt dus:

$$f(t) \approx f(a) + f'(a) \cdot (t - a).$$

Dit betekent ook dat als de functiewaarden in de buurt van een zekere t bekend zijn, men ook de afgeleide in t goed kan schatten met de volgende formule:

$$f'(t) \approx \frac{f(t + dt) - f(t)}{dt}.$$

Hoe dichter in de buurt van t (ofwel hoe kleiner de tijdstap dt), des te beter is de schatting van de afgeleide. Immers

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h}$$

Als voor een functie f de afgeleide $f'(t)$ bestaat, dan heet f **differentieerbaar** in t. Voor een 'nette' functie $f(t)$ op een interval is er in elk punt t van dat interval een afgeleide $f'(t)$ gedefinieerd. Daarmee is de afgeleide op het interval zelf een functie geworden, de **afgeleide functie**. Als de afgeleide f' een contiue functie is, dan heet f **continu differentieerbaar**. Veelgebruikte notaties voor de afgeleide functie van $f(t)$ zijn f', $\dfrac{df}{dt}$, $f'(t)$, $\dfrac{df}{dt}(t)$ en $\dfrac{d}{dt}f(t)$. Het bepalen van een afgeleide van een gegeven functie heet **differentiëren**.

Voorbeeld

Laten we de afgeleide functie voor de kwadratische functie uit bovenstaand voorbeeld eens uitrekenen.
Voor de kwadratische functie $f(t) = 3t^2 - 2t - 1$ berekenen we het differentiequotiënt over het tijdsinterval $[t, t + \triangle t]$.

$$\begin{aligned}
\frac{\triangle f}{\triangle t} &= \frac{f(t + \triangle t) - f(t)}{\triangle t} \\[2ex]
&= \frac{\big(3(t + \triangle t)^2 - 2(t + \triangle t) - 1\big) - \big(3t^2 - 2t - 1\big)}{\triangle t} \\[2ex]
&= \frac{\big(3t^2 + 6t\triangle t + 3(\triangle t)^2 - 2(t + \triangle t) - 1\big) - \big(3t^2 - 2t - 1\big)}{\triangle t} \\[2ex]
&= \frac{6t\triangle t + 3(\triangle t)^2 - 2\triangle t}{\triangle t} \\[2ex]
&= 6t - 2 + 3\triangle t \\[2ex]
&\to 6t - 2 \quad \text{als } \triangle t \to 0
\end{aligned}$$

Dus: $f'(t) = 6t - 2$ en in het bijzonder $f'(1) = 4$.

Het bepalen van een afgeleide op bovenstaande wijze is omslachtig, maar gelukkig bestaan er lijstjes met afgeleiden van standaardfuncties en rekenregels om efficiënt functies te differentiëren bij combinaties van functies.

Opgaven: Berekenen van een differentiequotiënt

Vraag 1.1

Bereken de gemiddelde toenamesnelheid van $f(t) = t^3$ over het interval $1 \leq t \leq 2$.

$\frac{\triangle f}{\triangle t} =$ ....

Vraag 1.2

Bereken de gemiddelde toenamesnelheid van $f(t) = t^3$ over het interval $2 \leq t \leq 3$.

$\frac{\triangle f}{\triangle t} =$ ....

Vraag 1.3

Bereken de gemiddelde toenamesnelheid van $f(t) = t^3$ over het interval $[t, t+h]$.

$\frac{\triangle f}{\triangle t} =$ ....

Theorie: Afgeleide van een machtsfunctie

Eerst maar eens een voorbeeld van een afgeleide van een machtsfunctie, berekend op basis van de basisdefinitie van afgeleide.

Voorbeeld

Bereken het differentiequotiënt van $f(x) = x^4$ over het interval $[x, x + \triangle x]$ en bepaal hiermee de afgeleide functie $f'(x)$.

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\frac{\triangle f}{\triangle x} &= \frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}\\[2ex] &= \frac{(x+\triangle x)^4-x^4}{\triangle x}\\[2ex] &= \frac{x^4+4x^3\cdot(\triangle x)+6x^2\cdot(\triangle x)^2+4x\cdot(\triangle x)^3+(\triangle x)^4-x^4}{\triangle x}\\[2ex] &= 4x^3+6x^2\cdot(\triangle x)+4x\cdot(\triangle x)^2+(\triangle x)^3\\[2ex] &\to 4x^3 \quad \text{als } \triangle x\to 0\end{aligned}$$

Dus: $f'(x)=4x^3$

Bij het bekijken van voldoende voorbeelden wordt het patroon zichtbaar.

Voorbeeld: Afgeleide van een machtsfunctie

De afgeleide van de functie $f(x)=x^p$ is gelijk aan $f'(x)=p\cdot x^{p-1}$ voor elk getal p.

Opgaven: Differentiëren van een machtsfunctie

Vraag 1

Bereken de afgeleide van de functie $f(y)=y^{1.6}$.

$f'(y)=$ ....

Vraag 2

Bereken de afgeleide van de functie $f(u)=4\cdot u^{-0.9}$.

$f'(u)=$ ....

Vraag 3

Bereken de afgeleide van de functie $f(t)=4\cdot t^{-4}$.

$f'(t) =$ ....

Vraag 4

Schrijf de functie $f(x) = 9\sqrt{x}$ eerst in de gedaante van een machtsfunctie en bereken daarna de afgeleide $f'(x)$.

$f(x) =$ ....

$f'(x) =$ ....

Theorie: De constante factorregel en de som- en verschilregel

De volgende regels worden gebruikt worden bij het differentiëren van een functie die

- een veelvoud van een andere functie is;
- de som of het verschil van twee andere functies is.

Voorbeeld: Rekenregels

$$\big(c \cdot f(x)\big)' = c \cdot f'(x) \quad \text{voor elke constante } c$$

$$\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)$$

$$\big(f(x) - g(x)\big)' = f'(x) - g'(x)$$

Meer

Voor de liefhebber geven we het bewijs van de constante factorregel en de som- en verschilregel

Voor $F(x) = c \cdot f(x)$, $s(x) = f(x) + g(x)$ en $v(x) = f(x) - g(x)$geldt

$$\begin{aligned}\frac{\triangle F}{\triangle x} &= \frac{F(x+\triangle) - F(x)}{\triangle x} \\ &= \frac{c \cdot f(x+\triangle x) - c \cdot f(x)}{\triangle x} \\ &= c \cdot \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x} \\ &\to c \cdot f'(x) \quad \text{als } \triangle x \to 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\triangle s}{\triangle x} &= \frac{f(x+\triangle x) + g(x+\triangle x) - \big(f(x) + g(x)\big)}{\triangle x} \\ &= \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x} + \frac{g(x+\triangle x) - g(x)}{\triangle x} \\ &\to \ f'(x) + g'(x) \quad \text{als } \triangle x \to 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\triangle v}{\triangle x} &= \frac{f(x+\triangle x) - g(x+\triangle x) - \big(f(x) - g(x)\big)}{\triangle x} \\ &= \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x} - \frac{g(x+\triangle x) - g(x)}{\triangle x} \\ &\to \ f'(x) - g'(x) \quad \text{als } \triangle x \to 0.\end{aligned}$$

De laatste rekenregel is enigszins overbodig omdat deze al volgt uit de eerste twee:

$$\begin{aligned}\big(f(x)-g(x)\big)' &= \Big(f(x)+\big(-1\cdot g(x)\big)\Big)'\\ &= f'(x)+\big(-1\cdot g(x)\big)'\\ &= f'(x)+\big(-1\cdot g'(x)\big)\\ &= f'(x)-g'(x)\end{aligned}$$

We noemen bovenstaande regels voor het differentiëren van een functie achtereenvolgens de **constante factorregel**, de **somregel** en de **verschilregel**.

Opgaven: Toepassen van constante factorregel, som- en verschilrege

Vraag 1

Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = 2.1 \cdot x^{-3.7} - 24$.

$f'(x) =$ ....

Vraag 2

Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = x^{0.8} - x^{-0.3}$.

$f'(x) =$ ....

Vraag 3

Schrijf de functie $f(u) = u^7 \cdot \sqrt{u} + \dfrac{1}{u^2}$ eerst in de gedaante van een som van machtsfuncties en bereken daarna de afgeleide $f'(u)$.

$f(u) =$ ....

$f'(u) =$ ....

Vraag 4

Schrijf de functie $f(x) = \dfrac{4x^6 + 3x^3 - 5x^2}{x^2}$ eerst in de gedaante van een som van machtsfuncties en
bereken daarna de afgeleide $f'(x)$.

$f(x) =$ ....

$f'(x) =$ ....

Theorie: De productregel

Bekijk eerst maar eens een paar voorbeelden.

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies

$$f(t) = t^2 + 5$$

$$g(t) = t^2 + 2t + 2$$

$$p(t) = f(t) \cdot g(t) = (t^2 + 5) \cdot (t^2 + 2t + 2)$$

Bereken

$f'(t)$

$g'(t)$

$p'(t)$ (werk eerst haakjes in $p(t)$ uit)

$f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t)$

Uitwerking: Uitwerken van het product geeft:

$$p(t) = (t^2 + 5) \cdot (t^2 + 2t + 2) = t^4 + 2\,t^3 + 7\,t^2 + 10\,t + 7$$

Dus:

$$f'(t) = 2t$$

$$g'(t) = 2t + 2$$

$$p'(t) = 4\,t^3 + 6\,t^2 + 14\,t + 10$$

$$\begin{aligned} f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t) &= 2t \cdot (t^2 + 2t + 2) + (t^2 + 5) \cdot (2t + 2) \\ &= (2t^3 + 4t^2 + 4t) + (2t^3 + 2t^2 + 10t + 10) \\ &= 4\,t^3 + 6\,t^2 + 14\,t + 10 \end{aligned}$$

Merk op dat

$$(f(t) \cdot g(t))' = f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t)$$

Het patroon is duidelijk en kan veralgemeniseerd worden tot de **productregel** voor differentiëren.

Voorbeeld: Productregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

of in verkorte notatie

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Meer

Voor de liefhebber geven we het bewijs van de productregel $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Voor $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ geldt

$$\begin{aligned}
\frac{\triangle p}{\triangle x} &= \frac{f(x+\triangle x)\cdot g(x+\triangle x) - f(x)\cdot g(x)}{\triangle x} \\
&= \frac{f(x+\triangle x)\cdot g(x+\triangle x) - f(x)\cdot g(x+\triangle x) + f(x)\cdot g(x+\triangle x) - f(x)\cdot g(x)}{\triangle x} \\
&= \frac{f(x+\triangle x)\cdot g(x+\triangle x) - f(x)\cdot g(x+\triangle x)}{\triangle x} + \frac{f(x)\cdot g(x+\triangle x) - f(x)\cdot g(x)}{\triangle x} \\
&= \frac{\triangle f}{\triangle x}\cdot g(x+\triangle x) + f(x)\cdot\frac{\triangle g}{\triangle x} \\
&\to f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \quad \text{als } \triangle x \to 0
\end{aligned}$$

Je kunt deze productregel ook homogeniseren:

$$\frac{(f(x)\cdot g(x))'}{f(x)\cdot g(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}$$

In deze vorm is gemakkelijk te zien wat er met een product van drie functies moet gebeuren:

$$\frac{(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x))'}{f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{h'(x)}{h(x)}$$

Opgaven: Toepassen van productregel

Vraag 1

Bereken met de productregel de afgeleide functie van $f(t) = 3t \cdot (t^3 + 1)$
en schrijf de afgeleide zo eenvoudig mogelijk op.

$f'(t) =$ ....

Vraag 2

Bereken met de productregel de afgeleide functie van $f(x) = (2x^2 + 3x - 1) \cdot (3x - 1)$
en schrijf de afgeleide zo eenvoudig mogelijk op.

$f'(x) =$ ....

Vraag 3

Bereken met de productregel de afgeleide functie van $f(x) = 2x^2(\frac{1}{2}x^2 - 7)$
en schrijf de afgeleide zo eenvoudig mogelijk op.

$f'(x) =$ ....

Vraag 4

Bereken met de productregel de afgeleide functie van $f(x) = x^2(x^2 + 4)$
en schrijf de afgeleide zo eenvoudig mogelijk op.

$f'(x) =$ ....

Theorie: De quotiëntregel

We beginnen eerst maar eens met een speciaal geval van de quotiëntregel voor differentiëren:

Regel

$$\text{Als } q(x) = \frac{1}{g(x)}, \text{ dan } q'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

Meer

Voor de liefhebber geven we het niet zo moelijke bewijs:

$$
\begin{aligned}
\frac{\triangle q}{\triangle x} &= \frac{q(x+\triangle x)-q(x)}{\triangle x} \\
&= \left(\frac{1}{g(x+\triangle x)}-\frac{1}{g(x)}\right)\cdot\frac{1}{\triangle x} \\
&= \left(\frac{g(x)-g(x+\triangle x)}{g(x+\triangle x)\cdot g(x)}\right)\cdot\frac{1}{\triangle x} \\
&= -\frac{g(x+\triangle x)-g(x)}{\triangle x}\cdot\frac{1}{g(x+\triangle x)\cdot g(x)} \\
&= -\frac{\triangle g}{\triangle x}\cdot\frac{1}{g(x+\triangle x)\cdot g(x)} \\
&\to -\frac{g'(x)}{g(x)^2} \quad \text{als } \triangle x \to 0
\end{aligned}
$$

De algemene **quotiëntregel** voor differentiëren is:

Voorbeeld: Quotiëntregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Meer

Voor de liefhebber geven we het bewijs van de quotiëntregel $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$

Voor $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ geldt m.b.v. de productregel en bovenstaand speciaal geval:

$$\begin{aligned} q'(x) &= \left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\cdot\left(-\frac{g'(x)}{g(x)^2}\right) \\ &= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

Een paar voorbeelden illustreren de quotiëntregel, die we in het kort noteren als $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$.

Voorbeeld

Differentieer de volgende functie met de quotiëntregel:

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

waarbij

$$f(x) = 2x, \quad g(x) = 5x^2 + 4$$

Bereken achtereenvolgens $f'(x)$ en $g'(x)$.
Bereken en vereenvoudig de afgeleide van het quotiënt, d.w.z. $q'(x)$.
Uitwerking:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \\ g'(x) &= 5\cdot 2x = 10x \\ q'(x) &= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2} \\ &= \frac{2\cdot(5x^2+4) - 2x\cdot 10x}{(5x^2+4)^2} \\ &= \frac{-10x^2+8}{(5x^2+4)^2} \end{aligned}$$

Voorbeeld

Differentieer de volgende functie met de quotiëntregel:

$$q(x) = \frac{4x-3}{5x+2}$$

Schrijf $q'(x)$ in de eenvoudigste vorm.
Uitwerking:

$$\begin{aligned} q'(x) &= \frac{(4x-3)' \cdot (5x+2) - (4x-3) \cdot (5x+2)'}{(5x+2)^2} \\ &= \frac{4 \cdot (5x+2) - (4x-3) \cdot 5}{(5x+2)^2} \\ &= \frac{23}{(5x+2)^2} \end{aligned}$$

Opgaven: Toepassen van quotiëntregel

Vraag 1

Differentieer de functie

$$f(x) = \frac{-4}{2-3x^2}$$

Kies een handige rekenregel om de opgave uit te werken.
Tip: je hoeft de haakjes in een antwoord niet uit te werken.

$f'(x) =$ ....

Vraag 2

Differentieer de functie

$$f(x) = \frac{4x^2+4x-5}{x^2}$$

Kies een handige rekenregel om de opgave uit te werken.
Breng niet alles in het antwoord onder één noemer.

$f'(x) =$ ....

Vraag 3

Differentieer de functie

$$f(x) = \frac{5x(x^{-4}+5)}{x}$$

Kies een handige rekenregel om de opgave uit te werken.
Breng niet alles in het antwoord onder één noemer.

$f'(x) =$ ....

Vraag 4

Differentieer de functie

$$f(x) = \frac{x^2+4}{x-10}$$

Kies een handige rekenregel om de opgave uit te werken.
Tip: je hoeft de haakjes in een antwoord niet uit te werken.

$f'(x) =$ ....

Theorie: De kettingregel

Bekijk eerst maar eens een paar voorbeelden.

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies

$$f(x) = x^3$$

$$g(x) = -3x - 3$$

$$s(x) = f\big(g(x)\big) = (-3x-3)^3$$

Bereken $f'(x)$, $g'(x)$, $s'(x)$ (werk eerst haakjes in $s(x)$ uit), $f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$.
Uitwerking: Uitwerken van de samengestelde functie geeft:

$$s(x) = (-3x-3)^3 = -27\,x^3 - 81\,x^2 - 81\,x - 27$$

Dus:

$$f'(x) = 3x^2$$

$$g'(x) = -3$$

$$s'(x) = -81\,x^2 - 162\,x - 81$$

$$\begin{aligned} f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) &= 3(-3x-3)^2 \cdot (-3) \\ &= -9(9\,x^2 + 18\,x + 9) \\ &= -81\,x^2 - 162\,x - 81 \end{aligned}$$

Merk op dat

$$s'(x) = \Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$g(x) = x^2 - 2x - 2$$

$$s(x) = f\big(g(x)\big) = (x^2 - 2x - 2)^2 - 1$$

Bereken $f'(x)$, $g'(x)$, $s'(x)$ (werk eerst haakjes in $s(x)$ uit), $f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$.
Uitwerking: Uitwerken van de samengestelde functie geeft:

$$s(x) = (x^2 - 2x - 2)^2 - 1 = x^4 - 4\,x^3 + 8\,x + 3$$

Dus:

$$f'(x) = 2x$$

$$g'(x) = 2x - 2$$

$$s'(x) = 4\,x^3 - 12\,x^2 + 8$$

$$\begin{aligned} f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) &= 2(x^2 - 2x - 2) \cdot (2x - 2) \\ &= (2x^2 - 4x - 4) \cdot (2x - 2) \\ &= 4x^3 - 4x^2 - 8x^2 + 8x - 8x + 8 \\ &= 4\,x^3 - 12\,x^2 + 8 \end{aligned}$$

Merk op dat

$$s'(x) = \Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Het patroon is duidelijk en kan veralgemeniseerd worden tot de **kettingregel** voor differentiëren.

Voorbeeld: Kettingregel

$$(f \circ g)'(x) = \Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) \quad \text{(mits de afgeleiden bestaan)}$$

Voorbeeld

Een bijzonder geval van toepassing van de kettingregel is het berekenen van de afgeleide van een functie na een lineaire transformatie.
Als $s(x) = f(a \cdot x + b)$, dan $s'(x) = a \cdot f'(x)$

Het eerste probleem bij dit alles is misschien nog wel het herkennen van de samenstelling van functies.
Een handige notatie kan helpen; zie onderstaande twee voorbeelden.

Voorbeeld

De functie
$$h(x) = (3x^2 - 1)^5$$
is te schrijven als samenstelling van twee functies:
$f(u) = u^5$ en $u = 3x^2 - 1$
De afgeleiden van deze functies zijn:
$f'(u) = \dfrac{df}{du} = 5u^4$ en $u'(x) = \dfrac{du}{dx} = 6x$.
Herinner je dat de notatie $\dfrac{df}{du}$ betekent dat je f naar u differentieert en daarna desgewenst voor u kunt invullen $3x^2 - 1$. De notatie $\dfrac{du}{dx}$ betekent dat je u naar x differentieert.
Volgens de kettingregel geldt dan:

$$h'(x) = \frac{d\big(f(u(x)\big)}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 5(3x^2 - 1)^4 \cdot 6x = 30x(3x^2 - 1)^4$$

Voorbeeld

De functie
$$h(t) = \sqrt{3t^2 + 4}$$
is te schrijven als samenstelling van twee functies:
$f(u) = \sqrt{u}$ en $u = 3t^2 + 4$
De afgeleiden van deze functies zijn:
$f'(u) = \dfrac{df}{du} = \big(\sqrt{u}\big)' = \big(u^{\frac{1}{2}}\big)' = \dfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ en $u'(t) = \dfrac{du}{dt} = 6$.

Volgens de kettingregel geldt dan:

$$h'(t) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{3t^2+4}} \cdot 6t = \frac{3t}{\sqrt{3t^2+4}}$$

Opgaven: Toepassen van kettingregel

Vraag 1

Bereken de afgeleide van de functie $f(r) = (4r+3)^2$ met behulp van de kettingregel.

$f'(r) =$ ....

Vraag 2

Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = \sqrt{3x^2+4}$ met behulp van de kettingregel.

$f'(x) =$ ....

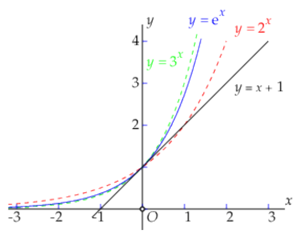
Vraag 3

Bereken de afgeleide van de functie $f(r) = (2r+5)^3\sqrt{2r+5}$ met behulp van de kettingregel.

$f'(r) =$ ....

Theorie: Afgeleiden van exponentiële functies

We roepen in herinnering dat dé exponentiële functie $f(x) = e^x$ geïntroduceerd is als de exponentiële functie met een zodanig grondtal (aangeduid met e) dat de grafiek van f en de rechte lijn met vergelijking $y = x+1$ elkaar raken in het punt $(0,1)$.



Dit betekent dat de functiewaarden van $f(x)$ en $y(x) = 1 + x$ weinig van elkaar verschillen voor kleine waarden van x. Met andere woorden: $e^{\triangle x} \approx 1 + \triangle x$ voor kleine $\triangle x$, oftewel

$$\frac{e^{\triangle x} - 1}{\triangle x} \to 1 \text{ als } \triangle x \to 0$$

Voor het differentiequotiënt van f geldt dus

$$\begin{aligned}
\frac{\triangle f}{\triangle x} &= \frac{e^{x+\triangle x} - e^x}{\triangle x} \\
&= \frac{e^x \cdot \; e^{\triangle x} - e^x}{\triangle x} \\
&= \frac{e^x \cdot \; (e^{\triangle x} - 1)}{\triangle x} \\
&= e^x \cdot \frac{e^{\triangle x} - 1}{\triangle x} \\
&\to e^x \text{ als } \triangle x \to 0
\end{aligned}$$

We hebben zojuist bewezen dat de afgeleide van dé exponentiële functie $f(x) = e^x$ gelijk is aan de functie zelf. Dit is het belangrijkste om te onthouden.

Voorbeeld: Afgeleide van de exponentële functie

Als $f(x) = e^x$ dan $f'(x) = e^x$

De afgeleide van de exponentiële functie $f(x) = e^x$ is gelijk aan de functie zelf. Deze functie heeft dus de eigenschappen dat $f'(x) = f(x)$. Dit is niet de enige functie met deze eigenschap: voor de functie $g(x) = c \cdot e^x$, met constante c, geldt dit ook.

Met bovenstaand resultaat en eerdere rekenregels kan de afgeleide voor een exponentiële functie met elk grondtal gevonden worden. Maar eigenlijk moet je de afgeleide van deze standaardfunctie uit het hoofd leren.

Voorbeeld: Afgeleide van een exponentiële functie met grondtal a

Als $f(x) = a^x$ dan $f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$ voor elk grondtal $a > 0$

Meer

Voor de liefhebber geven we het wiskundige bewijs van $(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$.
Eerst schrijven we de functie anders op: $f(x) = a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln(a)} = (e^x)^{\ln(a)}$.
Met de kettingregel en de afgeleide voor een machtsfunctie kunnen we nu $f(x)$

differentiëren:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((e^x)^{\ln(a)}\right)' \\ &= \ln(a) \cdot (e^x)^{\ln(a)-1} \cdot (e^x)' \\ &= \ln(a) \cdot (e^x)^{\ln(a)-1} \cdot e^x \\ &= \ln(a) \cdot (e^x)^{\ln(a)} \\ &= \ln(a) \cdot a^x \end{aligned}$$

Voorbeeld

Bereken de afgeleide van $f(r) = 10 \cdot 19^r$

Uitwerking: $f'(r) = 10 \cdot \left(19^r\right)' = 10 \cdot 19^r \cdot \ln(19) = 10 \cdot \ln(19) \cdot 19^r$

Merk op dat de functie $f(r)$ de volgende eigenschap bezit: $f'(r) = \ln(19) \cdot f(r)$.

Opgaven: Differentiëren van exponentiële functies

Vraag 1

Pas de rekenregels voor differentiëren en de formule voor de afgeleide van de exponentiële functie toe om de afgeleide van de functie $f(r) = 5e^r - 44$ uit te rekenen.

$f'(r) =$ ....

Vraag 2

Pas de rekenregels voor differentiëren en de formule voor de afgeleide van de exponentiële functie toe om de afgeleide van de functie $f(t) = t^7 e^{-t}$ uit te rekenen.

$f'(t) =$ ....

Vraag 3

Pas de rekenregels voor differentiëren en de formule voor de afgeleide van de exponentiële functie toe om de afgeleide van de functie $f(r) = (2r^2 - 1) \cdot e^r$ uit te rekenen.

$f'(r) =$ ....

Vraag 4

Pas de rekenregels voor differentiëren en de formule voor de afgeleide van de exponentiële functie toe om de afgeleide van de functie $f(r) = e^{2r-1}$ uit te rekenen.

$f'(r) =$ ....

Vraag 5

Bereken de afgeleide van de functie $f(t) = 300 \cdot 1.35^t$
Rond eventueel af tot 2 decimalen.

$f'(t) =$ ....

Vraag 6

Bereken de afgeleide van de functie $f(t) = 5.48 \cdot 0.26^t + 41$
Rond eventueel af tot 2 decimalen.

$f'(t) =$ ....

Vraag 7

Bereken de afgeleide van de functie $f(t) = 20 \cdot 4^{5t+6}$
Rond eventueel af tot 2 decimalen.

$f'(t) =$ ....

Vraag 8

Bereken de afgeleide van de functie $f(r) = (9r^2 + 6) \cdot 1.25^r$
Rond eventueel af tot 2 decimalen.

$f'(r) =$ ....

Theorie: Afgeleiden van logaritmische functies

Nu we de afgeleide van een exponentiële functie kennen is ook de afgeleide van een logaritmische functie te bepalen. Om te onthouden:

Voorbeeld: Afgeleide van een logaritmische functie

Als $f(x) = {}^{a}\log(x)$ dan $f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln(a)}$ voor elk grondtal $a > 0$, $a \neq 1$

Meer

Voor de liefhebber geven we het bewijs van $({}^{a}\log(x))' = \dfrac{1}{x \cdot \ln(a)}$.
Merk op dat de identieke functie $s(x) = x$ gelijk is de samenstelling van de functie $f(u) = a^u$ met $u = {}^{a}\log(x)$. Volgens de kettingregel en de formule voor de afgeleide van een machtsfunctie geldt:

$$1 = s'(x) = f'\big(u(x)\big) \cdot u'(x) = a^u \cdot \ln(a) \cdot u'(x) = x \cdot \ln(a) \cdot u'(x)$$

Dus:

$$u'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

Voorbeeld

Bereken de afgeleide van $f(r) = {}^{13}\log(9r)$
Uitwerking: $f(r) = {}^{13}\log(9r)$ is de samenstelling van $y = {}^{13}\log(u)$ en $u = 9r$.
Dan: $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{\ln(13) \cdot u}$ en $\dfrac{du}{dr} = 9$. De kettingregel geeft:

$$f'(r) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dr} = \frac{1}{\ln(13) \cdot 9r} \cdot 9 = \frac{1}{\ln(13)} \cdot \frac{1}{r}$$

Merk op dat de functie $f(r)$ de volgende eigenschap bezit: $f'(r)$ is een veelvoud van $\dfrac{1}{r}$.

Een bijzonder geval is de afgeleide van de natuurlijke logaritme:

Voorbeeld: Afgeleide van ln

Als $f(x) = \ln(x)$ dan $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Opgaven: Differentiëren van logaritmische functies

Vraag 1

Bereken de afgeleide van de functie $f(t) = \ln(17t) - \ln(5t)$.

$f'(t) =$ ....

Vraag 2

Reken de afgeleide van de functie $f(x) = x^2 \ln(3x)$ exact uit.

$f'(x) =$ ....

Vraag 3

Reken de afgeleide van de functie $f(r) = {}^{8}\log(2r)$ exact uit.

$f'(r) =$ ....

Theorie: Afgeleiden van goniometrische functies en inverse functies

In onderstaande tabel staan de afgeleiden van de goniometrische functies en hun inversie functie

functie	*afgeleide*
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos(x)^2}$
$\arcsin(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{x^2+1}$

Wat onmiddellijk opvalt is dat de afgeleide van een goniometrische functie zelf ook weer een goniometrische functie is. Meer algemeen: de afgeleide van een periodieke functie is zelf ook weer een periodieke functie.

Opgaven: Differentiëren van goniometrische en inverse functies

Vraag 1

Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = 3\sin(2x) - 2\cos(5x) - 2$.

$f'(x) =$ ....

Vraag 2

Bereken de afgeleide van de functie $f(t) = \tan(3t+1)$.

$f'(t) =$ ....

Vraag 3

Bereken de afgeleide van de functie $f(r) = 2\sin(5r)^2 + \cos(10r)$.

$f'(r) =$ ....

Vraag 4

Bereken de afgeleide van de functie

$$f(r) = \arctan(-4r) - 1$$

.

$f'(r) =$ ....

Vraag 5

Bereken de afgeleide van de functie

$$f(r) = \arccos(\sqrt{5}r)$$

.

$f'(r) =$ ....

Theorie: Hogere afgeleiden

Differentiatie van een functie $f(x)$ levert de afgeleide $f'(x)$, die ook wel genoteerd wordt als $\dfrac{df}{dx}(x)$ en $\dfrac{d}{dx}f(x)$. Deze afgeleide is een functie van x die we opnieuw kunnen differentiëren (tenminste bij 'nette' functies). Dat levert de **tweede afgeleide** van $f(x)$ op. Gebruikelijke notaties daarvoor zijn $f''(x)$, $\dfrac{d^2f}{dx^2}(x)$ en $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$
(Let bij de laatste twee notaties op de verschillende plaatsing van het getal 2 boven en onder de streep).

Voorbeeld

Bepaal de tweede afgeleide van $f(x) = x^7$ en van $g(t) = e^{-8t}$
Uitwerking:

$$\begin{array}{lll} f(x) = x^7 & \Longrightarrow f'(x) = 7x^6 & \Longrightarrow f''(x) = 7 \cdot 6x^5 = 42x^5 \\ g(t) = e^{-8t} & \Longrightarrow g'(t) = -8e^{-8t} & \Longrightarrow g''(t) = -8 \cdot -8e^{-8t} = 64e^{-8t} \end{array}$$

We hebben de afgeleide van een afgeleide gevormd en zo kunnen we doorgaan. Bij n keer differentiëren van de functie $f(x)$ krijgen we de **n-de afgeleide**. In het algemeen wordt voor de n-de afgeleide met $n > 2$ meestal een van de volgende notaties gebruikt: $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^nf}{dx^n}(x)$ en $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$.

Voorbeeld

Bepaal de eerste, tweede, derde en vierde afgeleide van $f(t) = e^{3t}$.
Uitwerking:

$$f(t) = e^{3t}$$

$$f'(t) = f^{(1)}(t) = 3e^{3t}$$

$$f''(t) = f^{(2)}(t) = 3^2e^{3t} = 9e^{3t}$$

$$f'''(t) = f^{(3)}(t) = 3^3e^{3t} = 27e^{3t}$$

$$f''''(t) = f^{(4)}(t) = 3^4e^{3t} = 81e^{3t}$$

Door patroonherkening vinden we de n-de afgeleide van $f(t)$:

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^nf}{dt^n}(t) = 3^ne^{3t}$$

Opgaven: Berekenen van hogere afgeleiden

Vraag 1

Bepaal de eerste, tweede en derde afgeleide van $f(x) = xe^{-x}$.
Probeer in een opvolgende afgeleiden een patroon te ontdekken zodat je ook een formule voor de n-de afgeleide kunt geven.

$f'(x) =$ ....

$f''(x) =$ ....

$f^{(3)}(x) =$ ....

$f^{(n)}(x) =$
....

Theorie: Impliciete afgeleide

De waarde van een functie f in x wordt vaak met y aangegeven: $y = f(x)$. Hier speelt y de rol van **afhankelijke variabele**. Deze variabele staat hierin *expliciet* geschreven, dat wil zeggen dat de afhankelijke variabele geïsoleerd aan de linkerkant van de formule staat en gegeven is door een expliciete uitdrukking in de **onafhankelijke variabele** x. Dit ben je gewend in wiskunde, waarin bijvoorbeeld de kwadraatfunctie vaak genoteerd worden als $y = x^2$, of in natuurkunde als bijvoorbeeld de afgelegde weg s in tijdsduur t gegeven wordt door de formule $s = v \cdot t$.

Veel relaties worden evenwel niet zo expliciet als functie gegeven. De grafiek van f is de verzameling punten $\big(x, y\big)$ met $y = f(x)$. Als f continu is, dan is de verzameling punten een kromme in het reële vlak, maar niet elke kromme is zo te beschrijven. In het algemeen heeft een kromme een beschrijving waarin x en y meer gelijkwaardige rollen spelen.

Definitie

De verzameling oplossingen $\big(x, y\big)$ van een vergelijking $F(x, y) = 0$, waarbij F een functie op het platte vlak is (de waarde in het punt $\big(x, y\big)$ wordt dus uitgedrukt door $F(x, y)$) heet de **kromme** gedefinieerd door F.
De vergelijking $F(x, y) = 0$ van de kromme heet een **impliciete functiedefinitie**.

Meer

Impliciet is het tegenovergestelde van expliciet. Een expliciete functiedefinitie met twee variabelen heeft de vorm $y = f(x)$ en een impliciete functiedefinitie met twee variabelen heeft de vorm $F(x, y) = 0$. Een impliciete vorm kan niet altijd in een expliciete vorm gegoten worden. De eenheidscirkel bijvoorbeeld wordt beschreven door de vergelijking $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Hier is y geen functie van x: er zijn *twee* waarden van y bij elke x in het open interval $(-1, 1)$. De positieve waarden van y corresponderen met de functie $y = \sqrt{1 - x^2}$ en de negatieve waarden met $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

Vaak is het mogelijk om een deel van de kromme $F(x, y) = 0$ als de grafiek van een functie f te zien. Als $\big(x, y\big)$ tot zo'n deel behoort, dan kunnen we $f'(x)$ bekijken, de afgeleide van f in x.

We kunnen deze afgeleide beschrijven zonder het functievoorschrift $f(x)$ expliciet te kennen. Herinner je dat $f'(x) = \dfrac{d}{dx}f(x)$. Aangezien $y = f(x)$, geldt ook $f'(x) = \dfrac{d}{dx}y$. Door $\dfrac{d}{dx}$ op te vatten als de 'operatie' differentiëren en alle regels voor het berekenen van afgeleiden ter beschikking te houden, kunnen we $\dfrac{d}{dx}F(x, y)$ uitwerken en uit $\dfrac{d}{dx}F(x, y) = 0$ een lineaire vergelijking met onbekende $\dfrac{dy}{dx}$ destilleren. Als deze vergelijking een unieke oplossing heeft, dan heet deze de **impliciete afgeleide** van y met betrekking tot x bepaald door de vergelijking $F(x, y) = 0$.

Regel: Impliciete differentiatie

Als de grafiek van een functie f op een open interval I van reële getallen deel uitmaakt van de kromme $F(x, y) = 0$, dan valt de waarde van de impliciete afgeleide van y in een punt c van I samen met $f'(c)$.

Meer

Het bewijs berust op het feit dat alle wetten en regels die gebruikt zijn om $\dfrac{dy}{dx}$ te berekenen, ook gelden voor $f'(c)$.
In het voorbeeld van de eenheidscirkel, waar $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, differentiëren we linker en rechter lid naar x (aangegeven met $\dfrac{d}{dx}$) en gebruiken we de standaardregels voor differentiëren:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) &= \frac{d}{dx}(1) \\
2x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\
y\frac{dy}{dx} &= -x \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y}
\end{aligned}
$$

Deze techniek is van nut bij het bepalen van de raaklijn aan de kromme in elk gewenst punt. Net als in het geval van een expliciete functie, geeft de raaklijn in een punt (a, b) de richting van beweging langs de kromme vanuit (a, b) aan.

Regel

Stel dat (a,b) een punt is van de kromme gegeven door de vergelijking $F(x,y)=0$. Als de impliciete afgeleide $\dfrac{dy}{dx}$ gedefinieerd is in a, dan wordt de **raaklijn** aan de kromme in dat punt gegeven door de vergelijking $y = y'(a)(x-a)+b$, waar $y'(a) = \dfrac{dy}{dx}(a)$ de waarde in a is van de afgeleide van y naar x bepaald door $F(x,y)=0$.

Voorbeeld

Neem het punt $(a,b) = \left(a, \sqrt{1-a^2}\right)$ op de eenheidscirkel, waarvan de vergelijking $x^2+y^2=1$ is. Er geldt: $2x+2y\dfrac{dy}{dx}=0$ oftewel $y' = -\dfrac{x}{y}$. Dus geldt: $y'(a) = -\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$. De vergelijking voor de raaklijn wordt $y = -\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}(x-a)+\sqrt{1-a^2}$, oftewel

$$\sqrt{1-a^2}y + ax = 1.$$

Dit is te controleren door de vergelijkingen voor de kromme en de lijn samen te nemen en op te lossen voor x na eliminatie van y. Dan zal blijken dat de kwadratische vergelijking in x slechts één oplossing $(x=a)$ heeft. Dit bevestigt dat de lijn een raaklijn is aan de kromme in het punt (a,b).

Enkele voorbeelden illustreren de techniek van impliciet differentiëren en toepassingen.

Voorbeeld

Bepaal de afgeleide $\dfrac{dy}{dx}$ als $-3y^2 = -2x$
Uitwerking: We differentiëren de linker- en rechterkant van de vergelijking

$$-3y^2 = -2x$$

met betrekking tot x en beschouwen hierbij y als een differentieerbare functie in x:

$$\frac{d}{dx}\left(-3y^2\right) = \frac{d}{dx}\left(-2x\right)$$

Toepassing van de kettingregel levert dan op:

$$-6y \cdot \frac{dy}{dx} = -2$$

Dus geldt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y}$$

Voorbeeld

Gebruik de impliciete differentiatiemethode om de afgeleide te bepalen van $y = \ln(x)$
Uitwerking: Nemen we links en rechts de e-macht van de vergelijking $y=\ln(x)$ dan vinden

we $e^y = x$. De afgeleide naar x van deze vergelijking is $e^y \cdot y'(x) = 1$, dus $y'(x) = \dfrac{1}{e^y}$. Via de relatie $e^{\ln(x)} = x$ vinden we

$$e^y = e^{\ln(x)} = x$$

Invullen van $e^y = x$ in $y'(x) = \dfrac{1}{e^y}$ levert het volgende antwoord:

$$y'(x) = \frac{1}{x}$$

Voorbeeld

Bepaal de afgeleide $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ als $4x^4 - 4y^4 = 7$.
Uitwerking: We differentiëren de linker- en rechterkant van de vergelijking

$$4x^4 - 4y^4 = 7$$

met betrekking tot x en beschouwen hierbij y als een differentieerbare functie in x:

$$\frac{d}{dx}\left(4x^4 - 4y^4\right) = \frac{d}{dx}(7)$$

Toepassing van de kettingregel levert dan op:

$$16x^3 - 16y^3 \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Dus geldt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{y^3}$$

We differentiëren de linker- en rechterkant van de laatste vergelijking:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{y^3}\right)$$

Toepassing van de quotiëntregel levert dan op:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3\,x^2}{y^3} - \frac{3\,x^3}{y^4} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Substitutie van $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3}{y^3}$ hierin leidt tot:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3\,x^2}{y^3} - \frac{3\,x^3}{y^4} \cdot \frac{x^3}{y^3}$$

$$= \frac{3\,x^2}{y^3} - \frac{3\,x^6}{y^7}$$

Voorbeeld

Een ladder staat tegen een muur en begint naar beneden te schuiven. Op de grond staat de ladder op $x(t)$ meter van de muur, op tijdstip t. Het steunpunt tegen de muur bevindt zich op hoogte $y(t)$ op tijdstip t. De ladder is 5 meter lang, en op tijdstip $t = 0$ geldt $x(0) = 3$ en $y(0) = 4$. Merk op dat $x(t)^2 + y(t)^2 = 25$ en daarom $y(t) = \sqrt{25 - x(t)^2}$. Nu schuift $x(t)$ met een snelheid van, zeg, 1 meter per tijdseenheid van de muur weg:

$$x'(t) = 1.$$

Differentiëren we de vergelijking

$$x(t)^2 + y(t)^2 = 25$$

naar t, dan krijgen we

$$2x(t) \cdot x'(t) + 2y(t) \cdot y'(t) = 0$$

Voor $t = 0$ staat hier

$$2x(0) \cdot x'(0) + 2y(0) \cdot y'(0) = 6 + 8y'(0) = 0$$

zodat $y'(0) = -\dfrac{3}{4}$.
We kunnen ook oplossen

$$y'(t) = -\frac{x(t) \cdot x'(t)}{y(t)} = -\frac{x(t) \cdot x'(t)}{\sqrt{25 - x(t)^2}} = -\frac{3+t}{\sqrt{25 - (3+t)^2}}$$

De laatste gelijkheid volgt uit $x'(t) = 1$ en $x(0) = 3$ zodat $x(t) = 3 + t$. Dit geeft opnieuw, op tijdstip $t = 0$, de uitkomst van $y'(0) = -\dfrac{3}{4}$ meter per tijdseenheid.

Opgaven: Impliciet differentiëren

Vraag 1

Bepaal de afgeleide $\dfrac{dy}{dx}$ als $y^2 = -x$

$\dfrac{dy}{dx} =$ ....

Vraag 2

Bereken exact de helling van de raaklijn van de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 169$ in het punt $\big(-5, -12\big)$.

helling = ...

Vraag 3

Gebruik de impliciete differentiatiemethode om de afgeleide te bepalen van $y = \arctan(x)$

. . . .

Vraag 4

Bepaal de afgeleide $\frac{dy}{dx}$ als $y^2 = 3x^2 + \ln(3xy)$

$\frac{dy}{dx} =$ . . . .

Vraag 5

Bepaal de afgeleide $\frac{d^2y}{dx^2}$ als $2x^5 - 5y^2 = 8$.

$\frac{d^2y}{dx^2} =$ . . . .

Theorie: Stijgen, dalen en extreme waarden

Gedrag van een functie kan onderzocht worden m.b.v. de afgeleide. Het verband tussen de grafiek van een 'nette' functie $f(x)$ op een interval I en de afgeleide functie $f'(x)$ op hetzelfde interval is namelijk:

$$\begin{aligned} \text{de grafiek van } f(x) \text{ is stijgend op } I &\iff f'(x) > 0 \\ \text{de grafiek van } f(x) \text{ is dalend op } I &\iff f'(x) < 0 \\ \text{de grafiek van } f(x) \text{ is stationair op } I &\iff f'(x) = 0 \end{aligned}$$

Een **globaal maximum (minimum)** van een functie is een punt waar de functie zijn grootste (kleinste) waarde aanneemt. Een **lokaal maximum (minimum)** van een functie is een punt waar de funtie boven (onder) zijn omgeving uitsteekt. De algemene term voor maximum of minimum is **extremum** (meervoud: extrema).

Als je een extremum van een 'nette' functie wilt bepalen, dan kun je eerst op zoek gaan naar een stationair punt. Immers, elk extremum is een stationair punt omdat de afgeleide in dit punt van teken wisselt. Wel moet je elk gevonden stationair punt nader onderzoeken. Er geldt:

Regel

Als $f'(a) = 0$ en het teken van $f'(x)$ verandert in $x = a$ van positief naar negatief, dan heeft $f(x)$ een lokaal maximum in $x = a$.
Als $f'(a) = 0$ en het teken van $f'(x)$ verandert in $x = a$ van negatief naar positief, dan heeft $f(x)$ een lokaal minimum in $x = a$.

Het tweede afgeleide criterium voor lokale extrema is een goed alternatief.

Regel

De functie $f(x)$ heeft een lokaal maximum in $x = a$ als $f'(a) = 0$ en $f''(a) < 0$.
De functie $f(x)$ heeft een lokaal minimum in $x = a$ als $f'(a) = 0$ en $f''(a) > 0$.

Als $f'(a) = 0$ en $f''(a) = 0$ dan kun je nog niet concluderen wat voor een stationair punt $x = a$ is: het kan een extremum zijn, maar het kan ook nog een **buigpunt** zijn, d.w.z. een punt waarin de afgeleide functie een maximum of minimum aanneemt.

Voor het berekenen van buigpunten van een functie kun je de tweede en derde afgeleide gebruiken:

Regel

De functie $f(x)$ heeft een buigpunt in $x = a$ als $f''(a) = 0$ en $f'''(a) \neq 0$.

Theorie: Toepassing 1: veranderingsgedrag van een functie

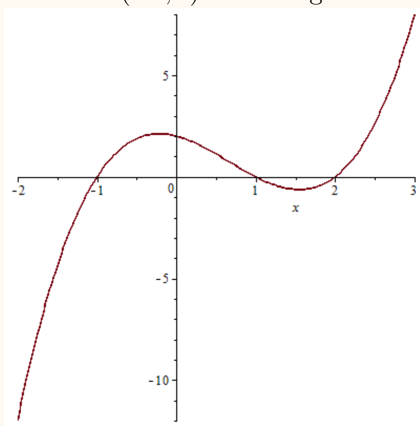
Dit voorbeeld is een onderzoek naar het veranderingsgedrag van een kale wiskundige functie.

Voorbeeld

We bepalen alle stationaire punten en buigpunten van de veeltermfunctie

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

De grafiek van $f(x)$ op het interval $(-2, 3)$ is als volgt:



We berekenen de eerste, tweede en derde afgeleide van $f(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$$
$$f''(x) = 6x - 4$$
$$f'''(x) = 6$$

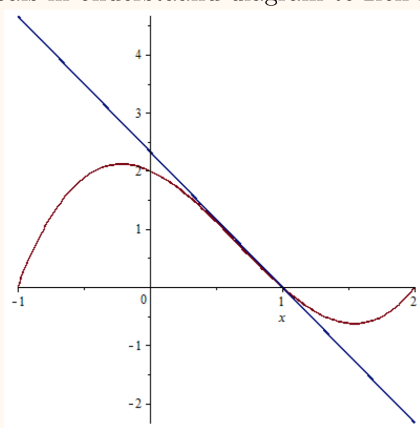
Om alle stationaire punten van $f(x)$ te vinden beginnen we met het oplossen van de vergelijking $f'(x) = 0$. Omdat de eerste afgeleide een kwadratische functie is kunnen we de *abc*-formule gebruiken:

$$3x^2 - 4x - 1 = 0 \iff x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 3 \times -1}}{2 \times 3} = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{7}$$

Bij benadering zijn de stationaire punten dus $x_1 \approx -0.22$ en $x_2 \approx 1.55$. Uit de grafiek lezen we af dat het eerste punt een lokaal maximum is en het tweede een lokaal minimum. Met het criterium van de tweede afgeleide kunnen we de aard van de berekende stationaire punten vaststellen.

$$f''\big(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}\big) = -2\sqrt{7} < 0 \implies x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7} \text{ is een lokaal maximum}$$
$$f''\big(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}\big) = 2\sqrt{7} > 0 \implies x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7} \text{ is een lokaal minimum}$$

Het betreft inderdaad lokale extrema omdat de functie $f(x)$ voor grote x sterk lijkt op de kubische functie x^3 en deze functie geen globaal maximum of minimum heeft.
Om alle buigpunten van $f(x)$ te vinden moeten we de vergelijking $f''(x) = 0$ oplossen. In dit geval gaat het om de lineaire vergelijking $6x - 4 = 0$ en de oplossing hiervan is gelijk aan $x = \frac{2}{3}$. Omdat $f'''(x) = 6 \neq 0$ is het berekende punt inderdaad een buigpunt van de functie $f(x)$. De afgeleide is in dit punt niet gelijk aan nul, maar $f'(\frac{2}{3}) = -\frac{7}{3}$. De raaklijn in het buigpunt is dus een neergaande rechte lijn (met vergelijking $y = -\frac{7}{3}x + \frac{63}{27}$) die de grafiek van $f(x)$ snijdt, zoals in onderstaand diagram te zien is.



Theorie: Toepassing 2: minimalisatie van materiaalgebruik

In het volgende rekenvoorbeeld bepalen we de afmetingen van een blikje met een inhoud van 1 liter, zodat de oppervlakte van het blikje(dat wil zeggen, de hoeveelheid materiaal om het blikje te maken) minimaal is.

De afmetingen van een blikje worden gegeven door een straal r centimeter en een hoogte h centimeter. Voor de inhoud I geldt $I = \pi r^2 h = 1000$ kubieke centimeter. De oppervlakte A van bodem, deksel en wand samen is gelijk aan $2\pi r^2 + 2\pi r h$ vierkante centimeter.
De formule voor I laat toe om h als functie van r te bepalen, namelijk $h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$.
Dit invullend in de formule voor A geeft

$$A = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

en dit hangt alleen nog van r af. We kunnen dus $A(r)$ voor de oppervlakte schrijven.

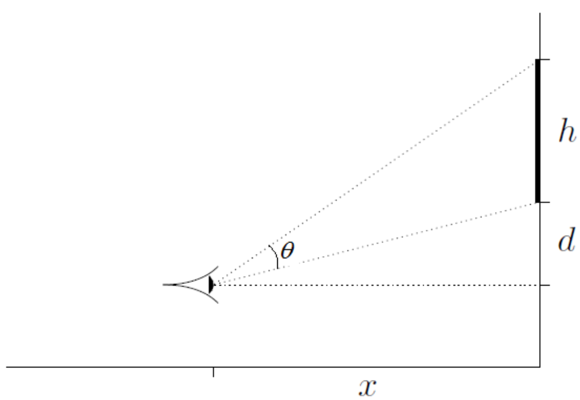
Om hiervan een minimum te vinden, berekenen we

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

Een simpele berekening laat zien dat $A'(r) = 0$ als $r = \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}$ centimeter.
Een functieonderzoek laat zien dat A grotere waarden aanneemt in andere punten, zodat A een minimum heeft in $r = \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}} \approx 5.42$ centimeter.

Theorie: Toepassing 3: de beste positie van een waarnemer

Een schilderij met een hoogte van h meter hangt aan een muur. De onderkant van het schilderij hangt op d meter boven het oog van de waarnemer. Op welke afstand van het schilderij moet een waarnemer staan om het schilderij onder een zo groot mogelijke kijkhoek waar te nemen?



Noem x de afstand van de waarnemer tot de muur. Trek lijnen van de waarnemer naar boven- en onderkant van het schilderij. Deze lijnen maken hoeken, θ_b en θ_o respectievelijk met een horizontaal. Er geldt

$$\tan(\theta_o) = \frac{d}{x} \qquad \text{en} \qquad \tan(\theta_b) = \frac{h+d}{x}$$

Dus de kijkhoek θ waarmee het schilderij wordt waargenomen, $\theta = \theta_b - \theta_o$, is gegeven door

$$\theta(x) \ = \arctan\left(\frac{h+d}{x}\right) - \arctan\left(\frac{d}{x}\right)$$

Differentiëren geeft

$$
\begin{aligned}
\theta'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{h+d}{x}\right)^2}\frac{-(h+d)}{x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{d}{x}\right)^2}\frac{-d}{x^2} \\
&= \frac{-(h+d)}{x^2+(h+d)^2} + \frac{d}{x^2+d^2} \\
&= \frac{-(h+d)(x^2+d^2)+d(x^2+(h+d)^2)}{(x^2+(h+d)^2)(x^2+d^2)},
\end{aligned}
$$

Dus

$$\theta'(x) = 0 \quad \text{als} \quad -(h+d)(x^2+d^2)+d(x^2+(h+d)^2) = 0.$$

Dit levert $x^2 = d(h+d)$, zodat $x = \sqrt{d(h+d)}$.
Een tekenschema laat zien dat dit een maximum is voor θ, maar dit kan je ook wel inzien aan de hand van de figuur.

Opgaven: Toepassen van afgeleiden

Vraag 1

De functie $f(x) = x^3 + 3x^2 - 8$ heeft een lokaal maximum, een lokaal minimum en een buigpunt. Bepaal deze twee extrema en bepaal het karakter m.b.v. het tweede afgeleide criterium. Bereken ook het buigpunt van $f(x)$

lokaal maximum van $f(x)$ is gelijk aan $x =$ ....

lokaal minimum van $f(x)$ is gelijk aan $x =$ ....

buigpunt van $f(x)$ is gelijk aan $x =$ ....

Vraag 2

Als model voor het gemiddelde temperatuursverloop van grieppatiënten is gekozen voor de functie van de vorm

$$T(t) = 37 + \frac{a \cdot t}{b + t^2}$$

Hierbij is $T(t)$ de temperatuur (in graden Celsius) op tijdstip t (in uren) na het oplopen van de griep.
Bepaal zowel de maximumtemperatuur T_{max} als het tijdstip t_{max} waarop de maximumtemperatuur bereikt wordt.

a. $t_{\text{max}} = \dfrac{\sqrt{b}}{a}$ en $T_{\text{max}} = 37 + \dfrac{a^2}{(a^2+1)\sqrt{b}}$

b. $t_{\max} = \dfrac{b}{a}$ en $T_{\max} = 37 + \dfrac{a^2}{(a^2+1)\sqrt{b}}$

c. $t_{\max} = b$ en $T_{\max} = 37 + \dfrac{a}{2\sqrt{b}}$

d. $t_{\max} = \sqrt{b}$ en $T_{\max} = 37 + \dfrac{a}{2\sqrt{b}}$

Vraag 3

De relatieve groei van een populatie met omvang $N(t)$ is het quotiënt van groei en populatieomvang:

$$\text{relatieve groei} = \frac{N'(t)}{N(t)}$$

Wat is de relatieve groei van een populatie waarin de omvang beschreven wordt met de functie

$$N(t) = \exp\left(b - e^{k-a\cdot t}\right)$$

voor zekere parameters a, b en k?
Ter herinnering: $\exp(x) = e^x$

a. $\dfrac{N'(t)}{N(t)} = a \cdot b \cdot \ln\big(N(t)\big)$

b. $\dfrac{N'(t)}{N(t)} = a\big(b - N(t)\big)$

c. $\dfrac{N'(t)}{N(t)} = a\Big(b - \ln\big(N(t)\big)\Big)$

d. $\dfrac{N'(t)}{N(t)} = a \cdot b \cdot N(t)$

Vraag 4

Stel dat voor een medicijn de bloedplasmaconcentratie $C(t)$ (in mg/L) van het werkend bestandeel op tjdstip t (in uren) na orale toediening gegeven is doort de functie

$$C(t) = e^{-2t} - e^{-6t}$$

De functie $C(t)$ begint in 0, stijgt naar een maximum en daalt daarna weer naar 0. Op welk tijdstip (in uren) wordt het maximum bereikt?

a. $\ln(\dfrac{3}{4})$

b. $\dfrac{1}{3}\ln(4)$

c. $\dfrac{1}{4}\ln(3)$

d. $\ln(3)$

Theorie: Taylorveeltermen

We hebben al gezien dat we een 'nette' functie f in de buurt van een punt $x = a$ kunnen benaderen met de raaklijn gegeven door de vergelijking

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Dit is precies die rechte lijn, die in de buurt van $\big(a, f(a)\big)$ het dichtst bij de grafiek van f ligt. De rechte lijn is de grafiek van de volgende veeltermfunctie

$$P(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Merk op dat P de enige eerstegraadsveelterm is met de eigenschap dat

$$P(a) = f(a), \quad P'(a) = f'(a).$$

Als er één schaap over de dam is volgen er meer: we kunnen het bovenstaande ook voor tweedegraadsveeltermen doen. We veronderstellen dat ook de tweede afgeleide van f bestaat (dit is onderdeel van de 'netheid' van de functie).
Neem nu de veeltermfunctie

$$P(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \frac{1}{2} f''(a) \cdot (x - a)^2.$$

Dan geldt

$$P(a) = f(a), \quad P'(a) = f'(a), \quad P''(a) = f''(a).$$

De grafiek van P is precies die parabool, die in de buurt van $\big(a, f(a)\big)$ het dichtst bij de grafiek van f ligt. Deze parabool ligt in de buurt van $\big(a, f(a)\big)$ dichter bij de grafiek van f dan de raaklijn in dit punt.

Je kunt hierna weer doorgaan met derdegraadsveeltermen en de veeltermfunctie

$$P(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \frac{1}{2} f''(a) \cdot (x - a)^2 + \frac{1}{6} f'''(a) \cdot (x - a)^3$$

nemen. De grafiek van deze derdegraadsveelterm ligt dan weer dichter dan bij de grafiek van f dan beide voorafgaande benaderingen.

De volgende stelling van Taylor maakt bovenstaande uitspraken precies; bovendien werkt hij voor polynomen van willekeurige graad. We zeggen dat een functie k keer differentieerbaar is als $f', f'', f''', \ldots f^{(k)}$ bestaan.

Voorbeeld: Stelling van Taylor

Veronderstel dat k een natuurlijk getal is en de functie f tenminste $k + 1$ keer differentieerbaar is. Dan is

$$f(x) = P(x) + R(x)$$

met

$$P(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \frac{1}{2} f''(a) \cdot (x - a)^2 + \cdot + \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \cdot (x - a)^k$$

een veeltermfunctie van graad k en

$$R(x) = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi) \cdot (x-a)^{k+1}$$

voor een of andere ξ die tussen a en x in ligt en van x afhangt.
De veelterm P heet de **Taylorveelterm rondom a van graad k**; R heet de **restterm van orde k**.
$n!$ (uitgesproken als n faculteit) is hierin gelijk aan het product aan het product van de natuurlijke getallen $1, 2, \ldots, n$

Eigenlijk zouden we P_k en R_k moeten schrijven om de afhankelijkheid van k aan te geven, maar die is meestal uit de context duidelijk. Voor numerieke benaderingsmethoden is de volgende twee opmerkingen van belang:

$$\frac{R_k(x)}{(x-a)^k} \to 0 \text{ als } x \to 0$$

en

$$|R_k(x)| \le M \cdot |x-a|^{k+1} \text{ als } a-r \le x \le a+r \text{ voor zekere } M \text{ en } r$$

Gegeven r, kunnen we nemen $M = \max\limits_{a-r \le x \le a+r} \left| \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x) \right|$.

Om schrijfwerk te besparen, maar toch een indicatie van de orde van grootte van een afbreekfout aan te geven, maakt men vaak gebruik van het (grote O) **O-symbool van Landau** en schrijft men ook

$$R_k(x) = O\big((x-a)^{k+1}\big).$$

Voorbeeld

Onderstaande tabel geeft de kwadratische benaderingen van enkele functies rond de oorsprong.

$$\begin{array}{lcccccccc}
e^x & = & 1 & + & x & + & \frac{1}{2}x^2 & + & O(x^3) \\
\sin x & = & & & x & & & + & O(x^3) \\
\cos x & = & 1 & & & - & \frac{1}{2}x^2 & + & O(x^3) \\
\frac{1}{1-x} & = & 1 & + & x & + & x^2 & + & O(x^3) \\
\sqrt{1+x} & = & 1 & + & \frac{1}{2}x & - & \frac{1}{8}x^2 & + & O(x^3) \\
\ln(1+x) & = & & & x & - & \frac{1}{2}x^2 & + & O(x^3)
\end{array}$$

Voorbeeld

Een directe berekening laat zien dat 6-de orde Taylorbenadering van $f(x) = \sin(x)$ rond het punt 0, gegeven wordt door $P_6(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$. De absolute waarde van de zevende afgeleide $\left(\frac{d}{dx}\right)^7 \sin(x) = -\cos(x)$ is maximaal 1. Dus:

$$|\sin(x) - x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5| \leq \frac{1}{7!}|x|^7.$$

Er geldt dat $\frac{1}{7!}|x|^7 < \frac{1}{10000}$ voor $|x| < \sqrt[7]{\frac{7!}{10000}} \approx 0.821$. Dus op het interval $[-0.8, 0.8]$ wordt de sinusfunctie tot op een fout van 0.0001 benaderd door de veelterm $P_6(x)$.

Theorie: Taylorreeksen

Voorbeeld

De exponentiële functie e^x heeft zichzelf als afgeleide. We nemen $a = 0, x > 0$ en vinden met de stelling van Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{k!}x^n + R_k(x)$$

met $R_k(x) = \frac{1}{(k+1)!}e^\xi x^{k+1}$ voor een of andere $0 < \xi < x$.
We nemen nu $x = 1, k = 6$ en bedenken dat het grondtal van de natuurlijke logaritme kleiner dan 3 is (d.w.z. $e < 3$). Dan geldt dus

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + R_6(1)$$

met $0 < R_6(1) < \frac{3}{5040} = \frac{1}{1680} < 0.0006$. We hebben dus e benaderd met $\frac{1957}{720} \approx 2.7180\ldots$ in 4 significante cijfers.

In dit laatste voorbeeld zou je zoveel termen kunnen opnemen als je wilt en de volgende reeksontwikkeling kunnen opschrijven:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$$

Dit heet de **Taylorreeks** van e^x rondom $x = 0$.

Merk op dat in het bijzonder geldt:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Voorbeeld

De Taylorreeksen van de sinus- en cosinusfunctie rondom de oorsprong zijn:

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}\end{aligned}$$

De Taylorreeksen voor de exponentiele functie, sinusfunctie en cosinusfunctie zijn niet alleen voor alle waarden rondom $x = 0$ geldig, maar zelfs voor alle waarden van x. Dit is niet altijd zo:

Voor de Taylorreeeks van $\ln(1 + x)$ geldt dat

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k\end{aligned}$$

maar dit is alleen waar voor $-1 < x \leq 1$.

Je kunt er dus ook $\ln(2)$ mee benaderen door de eerste termen van $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ op te tellen. Maar een goede benadering krijg je pas bij gebruik van heel veel termen: zelfs na 1000 termen heb je nog maar 2 decimalen correct.

Het kan ook slimmer door $x = -\frac{1}{2}$ te nemen omdat je je realiseert dat

$$\ln\big(1 + (-\tfrac{1}{2})\big) = \ln(\tfrac{1}{2}) = -\ln(2).$$

Dan krijg je al na 10 termen uit de Taylorreeks een benadering van $\ln(2)$ die correct is in 4 decimalen.

Opgaven: Berekenen van Taylorveeltermen

Vraag 1

Bepaal de eerste 4 termen van de Taylorreeks van

$$\frac{x}{1-x}$$

rondom $x = 0$ samen met de ordeterm van deze veeltermbenadering.

Je mag hierbij onderstaande tabel van Taylorreeksen van enkel standaardfuncties om de oorsprong gebruiken:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \\
\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \\
\ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots
\end{aligned}$$

Eerste 4 termen van Taylorreeks = ...

ordeterm = $O($ .... $)$

Vraag 2

Bepaal de eerste 4 termen van de Taylorreeks van

$$\ln(1 + 2x)$$

rondom $x = 0$ samen met de ordeterm van deze veeltermbenadering.

Je mag hierbij onderstaande tabel van Taylorreeksen van enkel standaardfuncties om de oorsprong gebruiken:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \\
\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \\
\ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots
\end{aligned}$$

Eerste 4 termen van Taylorreeks = ...

ordeterm = $O($ .... $)$

Theorie: Functie-iteratie en dekpunt

Definitie

Beschouw voor een gegeven 'nette' functie f en getal x_0 het voorschrift

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Volgens dit voorschrift wordt een rij $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ geconstrueerd; we zeggen dat deze rij ontstaat uit **functie-iteratie** met de functie f en **startwaarde** x_0.

De rij $x_0, x_1, x_2, x_3 \ldots$ wordt ook wel aangegeven met

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \ldots$$

We schrijven dan $f^n(x_0) = x_n$ waar f^n aangeeft dat we f n-maal toepassen. Voor zo'n herhaalde toepassing van een functie is natuurlijk nodig dat het beeld van de functie f binnen het domein van f valt; dit is onderdeel van de 'netheid' van de functie f. Een relatie, beschreven als in de vergelijking $x_{n+1} = f(x_n)$ heet een **eerste-orde differentievergelijking**, omdat x_{n+1} alleen van zijn eerste voorganger x_n afhangt.

Van groot belang zijn mogelijke punten waarvoor $x_{n+1} = x_n$. Zulke waarden kunnen ontstaan als de functie f een argument, zeg s, kent waarvoor $f(s) = s$. Een dergelijk punt s bij een gegeven functie f noemt men een **dekpunt**, of ook wel **stationair punt** of **vast punt van de functie** f. Interessant zijn rijen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ waarvoor x_n's willekeurig dicht bij zo'n dekpunt komen te liggen voor voldoende grote n, dat wil zeggen rijen die naar een vast punt convergeren. We spreken dan van een **aantrekkend dekpunt**. Omgekeerd heet een dekpunt **afstotend** wanneer een rij met startwaarde x_0 in de buurt van het dekpunt maar niet gelijk hieraan een rij $x_0, x_1, x_2, \ldots$ oplevert waarvan de waarden steeds verder weg van het dekpunt komen te liggen.

Voorbeeld

Beschouw de iteratie

$$f(x) = x - \frac{1}{3}(x^2 - 2), \quad \text{met } x_0 = 2$$

De eerste stappen in de iteratie leveren de volgende resultaten (exact en afgerond op 6 cijfers) in onderstaande tabel op:

n	x_n (exact)	x_n (afgerond)
0	2	2.00000
1	$\frac{4}{3}$	1.33333
2	$\frac{38}{27}$	1.40741
3	$\frac{3092}{2187}$	1.41381
4	$\frac{20\,292\,086}{14\,348\,907}$	1.41419
5	$\frac{873\,521\,274\,507\,908}{617\,673\,396\,283\,947}$	1.41421

Hierna veranderen de 5 decimalen niet meer en dat zou dus een benadering van een dekpunt van deze functie kunnen zijn. In dit geval is gemakkelijk in te zien dat dit zo is omdat $x = \sqrt{2}$ inderdaad een dekpunt is. Het lijkt er dus op dat iteratie met deze functie voor beginwaarde $x_0 = 2$ naar dit dekpunt convergeert.

Het is ook duidelijk dat de functie f een dekpunt in $-\sqrt{2}$ heeft, maar als je bijvoorbeeld met $x_0 = -2$ begint, in de veronderstelling dat je dan naar het dekpunt convergeert, kom je bedrogen uit. De resultaten staan in onderstaande tabel.

n	x_n (exact)	x_n (afgerond)
0	-2	-2.00000
1	$-\dfrac{8}{3}$	-2.66667
2	$-\dfrac{118}{27}$	-4.37037
3	$-\dfrac{22\,024}{2187}$	-10.0704
4	$-\dfrac{619\,990\,102}{14\,348\,907}$	-43.2082
5	$-\dfrac{410\,664\,274\,485\,257\,336\,648}{617\,673\,396\,283\,947}$	-664.857

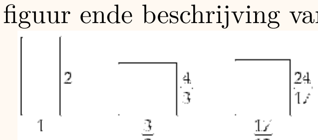
Ook als je bij $x_0 = -1$ begint gaat het niet beter:

n	x_n (afgerond)
0	-1.00000
1	-0.666667
2	-0.148148
3	0.511203
4	1.09076
5	1.36084
6	1.41021
7	1.41398
8	1.41020
9	1.41021

We komen nu weer uit op een benadering van $\sqrt{2}$. Hoe dicht je ook bij $-\sqrt{2}$ start, de iteranden gaan steeds verder van het dekpunt weg. Met andere woorden, $-\sqrt{2}$ is een afstotend dekpunt.

Voorbeeld: Methode van Héron

Héron van Alexandrië, een Egyptische wiskundige uit de eerste eeuw van onze jaartelling, heeft de volgende iteratieve methode bedacht om het getal $\sqrt{2}$ nauwkeurig te benaderen. Het idee is dat een vierkant met zijde $\sqrt{2}$ een oppervlakte van grootte 2 heeft en dat je herhaald rechthoeken met oppervlakte 2 kunt maken die steeds meer op een vierkant gaan lijken; zie onderstaande figuur ende beschrijving van de constructie.



We beginnen met een rechthoek met breedte $b_0 = 1$ en lengte $l_0 = 2$. De volgende rechthoek ontstaat door als breedte het gemiddelde te nemen van de twee zijden van de eerste: $b_1 = \dfrac{b_0 + l_0}{2}$. Opdat de oppervlakte van de te vormen rechthoek gelijk is aan twee, moeten we voor de lengte nemen $l_1 = \frac{2}{b_1}$. In getallen: $b_1 = \frac{3}{2}, l_1 = \frac{4}{3}$. Deze werkwijze kun je herhalen: de volgende rechthoek heeft breedte $b_2 = \frac{b_1 + l_1}{2} = \frac{17}{12}$ en lengte $l_2 = \frac{2}{b_2} = \frac{24}{27}$. De rij $b_0, b_1, b_2, \ldots$ convergeert naar $\sqrt{2}$. Je kunt eenvoudig bewijzen dat de waarde van b_{n+1} op de volgende manier van die van b_n afhangt: $b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{1}{b_n}$. Met andere woorden, $\sqrt{2}$ is een dekpunt van de functie

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

en de waarde is te benaderen d.m.v. iteratie van f.

Theorie: Stabiliteit van een dekpunt

We hebben al een voorbeeld van functie-iteratie gezien waarin dekpunten zowel aantrekkend als afstotend waren. Het zou fijn zijn we als over het gedrag bij een start van een functie-iteratie in de buurt van een dekpunt vooraf al weten of dit aantrekkend dan wel afstotend is. De volgende stelling doet hier een uitspraak over.

Stelling

Stel dat de functie f een continue afgeleide heeft. Bij iteratie van de functie f met dekpunt s geldt dan het volgende:
Als $|f'(s)| < 1$, dan is het dekpunt s aantrekkend.
Als $|f'(s)| > 1$, dan is het dekpunt s afstotend.

Meer

Stel dat de functie f een continue afgeleide heeft. Bij iteratie van de functie f met dekpunt s geldt dan het volgende:
Als $|f'(s)| < 1$, dan is het dekpunt s aantrekkend.
Als $|f'(s)| > 1$, dan is het dekpunt s afstotend.

Voor de liefhebber bewijzen de eerste bewering.
Stel s is een dekpunt met $|f'(s)| < 1$. Vanwege de continuïteit van de afgeleide functie geldt dat er een getal $M < 1$ is en een voldoende klein interval I rondom s zodanig dat $f'(x)| < M < 1$ voor alle punten in I. We kiezen een startpunt x_0 in I . Voor elke iterand x_k kunnen we de stelling van Taylor toepassen rondom s toepassen: er bestaat een getal ξ tussen s en x_k zodanig dat

$$f(x_k) = f(s) + f'((\xi)(x_k - s)$$

oftewel

$$x_{k+1} - s = f'((\xi)(x_k - s)$$

Als het punt x_k in I ligt, dan ligt ξ ook per definitie in I en geldt dus $|f'(\xi)| < M < 1$.
Maar dan geldt dus

$$\frac{|x_{k+1} - s|}{|x_k - s|} = f'(\xi) < M < 1$$

Voor willekeurige x_n volgt hieruit dat

$$\frac{|x_n - s|}{|x_0 - s|} = \frac{|x_n - s|}{|x_{n-1} - s|} \cdot \frac{|x_{n-1} - s|}{|x_{n-2} - s|} \cdots \frac{|x_1 - s|}{|x_0 - s|} < M^n$$

Maar dit betekent dat

$$|x_n - s| \to 0, \text{ als } n \to \infty.$$

Met andere woorden, het dekpunt is onder de gegeven voorwaarde aantrekkend.

De tweede bewering in de stelling is op gelijksoortige wijze te bewijzen.

Voorbeeld

We bekijken de veelterm

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

met nulpunten 2 en 3.
We kunnen de vergelijking $x^2 - 5x + 6 = 0$ herschrijven als $x = x^2 - 4x + 6$ en dus de iteratie van de functie

$$f_1(x) = x^2 - 4x + 6$$

bekijken. Dan geldt dat $f_1'(2) = 0 < 1$ en dus is het dekpunt 2 aantrekkend, maar de startwaarde moet wel tussen 1 en 3 gekozen worden voor convergentie. In dit geval is $f_1'(3) = 2 > 1$ en is 3 dus een afstotend dekpunt.
We kunnen de vergelijking $x^2 - 5x + 6 = 0$ ook herschrijven als $x = \frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{5}$ en dus de iteratie van de functie

$$f_2(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{5}$$

bekijken. Dan geldt dat $f_2'(2) = \frac{4}{5} < 1$ en dus is opnieuw het dekpunt 2 aantrekkend, zij het met een trager convergentiegedrag dan bij de vorige iteratie-functie. Ook nu geldt weer dat $f_2'(3) = \frac{6}{5} > 1$ en 3 dus een afstotend dekpunt is.
Als derde alternatief kunnen we de vergelijking $x^2 - 5x + 6 = 0$ herschrijven als $x = \frac{5x - 6}{x} = 5 - \frac{6}{x}$ en dus de iteratie-functie

$$f_3(x) = 5 - \frac{6}{x}$$

bekijken. Dan geldt dat $f_3'(2) = \frac{3}{2}$ en dus is het dekpunt 2 afstotend. In dit geval is $f_3'(3) = \frac{2}{3} < 1$ en is 3 een aantrekkend dekpunt
We zien dus dat het gedrag van de iteratie in de buurt van de dekpunten afhangt van de gekozen functie.
Maar er zijn veel meer functies te bedenken voor iteratie. Voor een willekeurig getal k kunnen we de vergelijking $x^2 - 5x + 6 = 0$ herschrijven als $x + k \cdot (x^2 - 5x + 6) = x$ en dus de iteratie-functie

$$f(x) = x + k \cdot (x^2 - 5x + 6)$$

bekijken voor verschillende waarden van k. Dan geldt dat $f'(x) = 1 + 2kx - 5k$. Voor optimale convergentie in de dekpunten hebben we het liefst een keuze van k zodat $f'(s) = 0$. Zijn we geïnteresseerd in het dekpunt 2 dan is de beste keuze $k = 1$ en zijn we terug bij de functie f_1. In het geval van dekpunt 3 is de beste keuze $k = -1$. Dan is de iteratie-functie gelijk aan $f_4(x) = -x^2 + 6x - 6$, maar dan moet je voor convergentie naar het dekpunt 3 wel een startwaarde tussen 2 en 4 nemen.

Theorie: Afleiding van de Newton-Raphson methode

We laten zien hoe de zogenaamde Newton-Raphson methode voor nulpuntsbepaling van een 'nette' functie f uit de theorie van iteratie-functies ontstaat.

Om te beginnen is de vergelijking

$$f(x) = 0$$

equivalent met

$$x + \alpha \cdot f(x) = x \quad \text{mits } \alpha \neq 0.$$

In plaats van een nulpunt van de functie f te bepalen, kunnen we net zo goed een dekpunt van de iteratie-functie

$$g(x) = x + \alpha \cdot f(x)$$

proberen te benaderen. Een dekpunt s van g is aantrekkend als $|g'(s)| < 1$ en het liefst hebben we $|g'(s)|$ zo klein mogelijk. De beste convergentie treedt dus op bij de keuze van α waarvoor geldt

$$1 + \alpha \cdot f'(s) = 0$$

oftewel wanneer

$$\alpha = -\frac{1}{f'(s)}.$$

Probleem is natuurlijk dat het dekpunt s van de iteratie-functie vooraf niet bekend is. Een tweede observatie is dat het ons vrij staat om in iedere iteratiestap een nieuwe α te kiezen, zeg α_n. Als de functie 'net' is, bijvoorbeeld een continue afgeleide heeft, dan zal bij een rij $x_0, x_1, x_2, \ldots$ die naar een dekpunt s convergeert de rij $f'(x_0), f'(x_1), f'(x_2), \ldots$ naar $f'(s)$ convergeren. Dit motiveert onze keuze om in elke stap van de iteratie als geschikte α de afgeleide van f in de op dat moment gevonden iterand te gebruiken via de formule

$$\alpha_n = -\frac{1}{f'(x_n)}$$

waarbij $x_k = f^n(x_0)$.

We zijn zo uitgekomen bij de iteratieve formule voor de Newton-Raphson methode van nulpuntsbepaling.

Voorbeeld: Newton-Raphson methode

Voor een functie f met continue afgeleide kan een nulpunt bepaald worden door de iteratie

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

mits het startpunt x_0 voldoende dicht bij een dekpunt s gekozen wordt en $f'(s) \neq 0$.

Voorbeeld: Convergentiegedrag van Newton-Raphson methode

De Newton-Raphson methode voor nulpuntsbepaling van een functie f is dus niets anders dan de iteratie van de functie
$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$
met een startwaarde x_0 voldoende dicht in de buurt van een aantrekkend dekpunt s met $f'(s) \neq 0$. Er geldt:
$$N(s) = s, \quad N'(s) = 0, \quad N''(s) = \frac{f''(s)}{f'(s)}.$$
(Ga de laatste gelijkheid zelf na.) Laten we nu eens het convergentiegedrag van de Newton-Raphson methode bestuderen. Laat $\epsilon_n = x_n - s$ de absolute afbreekfout zijn van de n-de benadering van het dekpunt s. Dus $x_n = s + \epsilon_n$. Volgens de stelling van Taylor is er dan een ξ tussen s en x_n zodanig dat
$$N(x_n) = N(s) + N'(s) \cdot (\epsilon_n + \tfrac{1}{2}N''(s) \cdot \epsilon_n^2$$
Anders gezegd:
$$x_{n+1} = s + \frac{f''(s)}{f'(s)} \cdot \epsilon_n^2$$
voor zekere ξ tussen s en x_n. Met andere woorden
$$\epsilon_{n+1} = \frac{f''(s)}{2f'(s)} \cdot \epsilon_n^2$$
en de convergentie van de Newton-Raphson methode is onder de gegeven omstandigheden dus minstens kwadratisch.

Voorbeeld

We passen de Newton-Raphson methode toe op de functie $f(x) = x^2 - 2$ om $\sqrt{2}$ te benaderen, waarbij we starten in $x_0 = 1$. Dan is de bijpassende iteratie-functie $N(x)$ gegeven door
$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2-2}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}.$$
De Newton-Raphson methode is nu niets ander dan de eerder besproken methode van Héron.

Voorbeeld: Grafische beschrijving van Newton-Raphson methode

de Newton-Raphson methode voor de nulpuntsbepaling van een functie f kan ook als volgt begrepen worden, We beginnen met een benadering x_0 van het nulpunt van f. Bepaal de raaklijn aan de grafiek
van f in het punt $\big(x_0, f(x_0)\big)$. Veronderstel dat $f'(x_0) \neq 0$, dan snijdt deze raaklijn de x-as in een punt $\big(x_1, 0\big)$. Dit punt kunnen we uitrekenen: de vergelijking van de raaklijn

is

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

De x-coördinaat van snijpunt van deze lijn met de x-as voldoet aan de vergelijking

$$f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) = 0$$

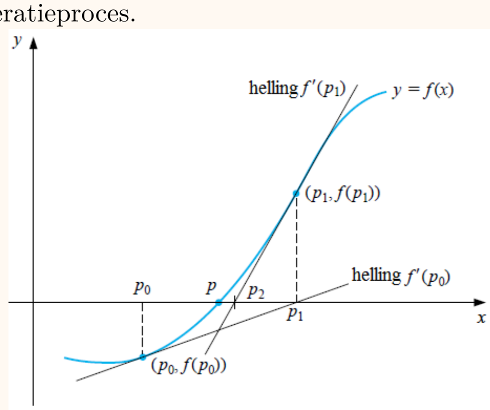
en is dus gelijk aan

$$x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Als volgende benadering van een nulpunt van f nemen we

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

en hierna herhalen we dit benaderingsproces. Onderstaande figuur illustreert de eerst twee stappen in dit iteratieproces.



Opgaven: Berekenen van iteratie-functie in Newton-Raphson methode

Vraag 1

Stel dat we nulpunten van de veeltermfunctie

$$f(x) = x^3 - c\,x + d$$

willen benaderen via de Newton-Raphson methode.
Wat is dan de formule voor de iteratie-functie $N(x)$?

$N(x) =$ ....

Integreren

Theorie: Wat is een differentiaal?

Het begrip **differentiaal** kan op verschillende manieren geïntroduceerd worden: in een wat slordige maar intuïtieve stijl of wiskundig rigoureus, en in de context van wiskundige functies (als verandering van linearisaties van functies) of in wiskundige vakgebieden als infinitesimaalrekening, differentiaalmeetkunde of niet-standaard analyse. In deze module is gekozen voor de eerste aanpak.

Voorbeeld: Voorbeeld van een kwadratische functie

Eerst maar eens een eenvoudig voorbeeld uit een natuurkundige context: het kwadratische verband $s = a \cdot t^2$ tussen de afstand s afgelegd in een tijdsduur t door een voorwerp dat op tijdstip $t = 0$ in rust is en daarna een eenparig versneld rechtlijnige beweging ondergaat met een versnelling a, die in dit voorbeeld constant is. De afgelegde afstand $\triangle s(t_1)$ tussen tijdstip $t = t_1$ en $t = t_1 + \triangle t$ is exact te berekenen:

$$\triangle s(t_1) = a(t_1 + \triangle t)^2 - at_1^2 = 2at_1\triangle t + a(\triangle t)^2.$$

Als de tijdsduur $\triangle t$ kort is, dan is $(\triangle t)^2$ veel kleiner dan $\triangle t$ en is de laatste term in bovenstaande vergelijking verwaarloosbaar klein. Dus:

$$\triangle s(t_1) \approx 2at_1\triangle t, \quad \text{voor kleine } \triangle t.$$

De grootheid s is niet alleen de afgelegde afstand, maar representeert tegelijkertijd de positie van het voorwerp op een zeker tijdstip. Dus kan de laatstste vergelijking ook beschouwd worden als een benadering voor de verandering van positie $\triangle s(t_1)$ op een tijdsinterval $[t_1, t_1 + \triangle t]$ en die benadering is beter naarmate de verandering van tijd $\triangle t$ kleiner is. Let wel, het gaat dus hier om een verband tussen veranderingen van twee grootheden (positie en tijd). Om aan te geven dat de veranderingen verwaarloosbaar klein zijn ('infinitesimaal') gebruikt men de symbolen ds en dt, en dan kan de benadering als een gelijkheid

$$ds(t_1) = 2a \cdot t_1 \cdot dt$$

opgeschreven worden. Omdat zowel dt als ds als veranderingen, d.w.z. als verschil tussen eind- en beginwaarde, opgevat worden, noemt men ze **differentialen**. De verhouding van deze differentialen, het **differentiaalquotiënt** $\dfrac{ds}{dt}$, is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in een punt $(t, s(t))$, d.w.z. gelijk aan de afgeleide van s in t.

Theorie: Differentiaal van een functie

Differentiaal van een functie
Het vorige voorbeeld kan als volgt veralgemeniseerd worden: Stel dat de functie $y = f(t)$ differentieerbaar is in het punt t. Voor een kleine toename $\triangle t$ van t, kan men de toename $\triangle y = f(t + \triangle t) - f(t)$ goed schatten met de volgende formule:

$$\triangle y \approx f'(t) \cdot \triangle t$$

Hoe dichter in de buurt van t, d.w.z. hoe kleiner $\triangle t$, des te beter is de schatting van de functiewaarde. Achterliggend idee bij deze formule is dat de grafiek van een differentieerbare functie praktisch gezien een rechte lijn is als voldoende ingezoomd wordt. Voor verwaarloosbare veranderingen, genoteerd met dy en dt, kan dan het volgende opgeschreven worden:

$$\text{Als } y=f(t),\ \text{dan is } dy=f'(t)\,dt$$

Het rechterlid $f'(t)\,dt$ heet de **differentiaal van f** en men gebruikt hiervoor de notaties dy, df en $d\bigl(f(t)\bigr)$ De differentiaal van f hangt dus af van het tijdstip t en de infinitesimale verandering dt. Als dy genoteerd wordt als df, dan is het verband tussen differentialen en afgeleiden snel gelegd: het quotiënt van de differentialen df en dt, beter bekend onder de naam **differentiaalquotiënt**, is gelijk aan de afgeleide $f'(t)$ in t. Vandaar het gemengde gebruik van y' en $\dfrac{dy}{dt}$ voor de afgeleide functie in deze lesmodule. Ook is hiermee duidelijk dat een **differentiaalvergelijking**, d.w.z. een vergelijking waarin naast een nog onbekende functie ook een of meer afgeleiden van die functie voorkomen, tevens als vergelijking tussen differentialen opgeschreven kan worden: bijvoorbeeld kan de differentiaalvergelijking $\dfrac{dy}{dt}=y$ als relatie tussen differentialen geschreven worden als $dy=y\,dt$. Meer algemeen kan de differentiaalvergelijking $\dfrac{dy}{dt}=\varphi(t,y)$, met φ een functie in twee veranderlijken, herschreven worden in termen van differentialen als $dy=\varphi(t,y)\,dt$.

Voorbeeld: Voorbeeld van het gebruik van differentialen

Ook al zijn de twee schrijfwijzen voor een differentiaalvergelijking equivalent, in praktijk blijkt de taal van differentialen wel handiger voor het opstellen en oplossen van een differentiaalvergelijking. Het volgende voorbeeld van de afleiding van de formule van de oppervlakte van een cirkel met gegeven straal moge dit illustreren. Beschouw de oppervlakte A van een cirkel als een grootheid die afhangt van de straal r. Neem nu een cirkel waarvan de straal iets groter is, namelijk $r+\triangle r$. Dan is de oppervlakte ook een klein beetje toegenomen, zeg met $\triangle A$. Deze kleine veranderingen zijn gerelateerd aan elkaar via de formule $\triangle A\approx C\cdot\triangle r$, waarbij C de omtrek is van de cirkel met straal r. Immers, de cirkelstrook met breedte $\triangle r$ die bij de cirkel met straal r extra toegevoegd is kan glad getransformeerd worden tot een rechthoek met lengte C en breedte $\triangle r$ als deze breedte maar klein genoeg is. Bij infinitesimale veranderingen komt op deze manier de vergelijking $dA=C\,dr$ tot stand. De afgeleide $\dfrac{dA}{dr}$ is dus gelijk aan C. Met de kennis van $C=2\pi r$, vinden we dan dat de afgeleide van A gelijk is aan $2\pi r$ en dus $A=\pi r^2$.

Theorie: Rekenregels voor differentialen

Het eerder genoemde verband tussen differentialen en afgeleiden maakt de volgende vertaling van rekenregels voor differentiëren naar rekenregels voor differentialen mogelijk:

Voorbeeld: Rekenregels voor differentialen

$$d\big(c\cdot f(t)\big)=c\cdot d\big(f(t)\big),\ \text{voor elke constante } c$$

$$d\big(f(t)+g(t)\big)=d\big(f(t)\big)+d\big(g(t)\big)\quad \text{(somregel)}$$

$$d\big(f(t)\cdot g(t)\big)=g(t)\cdot d\big(f(t)\big)+f(t)\cdot d\big(g(t)\big)\quad \text{(productregel)}$$

$$d\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)=\frac{g(t)\cdot d\big(f(t)\big)-f(t)\cdot d\big(g(t)\big)}{\big(g(t)\big)^2}\quad \text{(quotiëntregel)}$$

$$d\Big(f\big(g(t)\big)\Big)=f'\big(g(t)\big)\cdot d\big(g(t)\big)=f'\big(g(t)\big)\cdot g'(t)\,dt\quad \text{(kettingregel)}$$

In verkorte notatie zijn de eerste drie rekenregels te schrijven als:

Voorbeeld: Verkorte notatie van rekenregels voor differentialen

$$d(c\cdot f)=c\cdot df,\ \text{voor elke constante } c$$

$$d(f+g)=df+dg\quad \text{(somregel)}$$

$$d(f\cdot g)=g\cdot df+f\cdot dg\quad \text{(productregel)}$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\cdot df-f\cdot dg}{g^2}\quad \text{(quotiëntregel)}$$

Voorbeeld

Schrijf de volgende differentiaal in de vorm $f'(x)\,dx$.
Uitwerking: $d(4x^2-7x+4)=(8x-7)\,dx$

Via de constante factorregel en de somregel voor differentialen en de afgeleide van een machtsfunctie gaat dit als volgt:

$$\begin{aligned} d(4x^2-7x+4) &= d(4x^2)+d(-7x)+d(4)\\ &= 4\,d(x^2)-7\,dx+d(4)\\ &= 4\cdot 2x\,dx-7\,dx+0\\ &= 8x\,dx-7\,dx\\ &= (8x-7)\,dx \end{aligned}$$

Je kan ook de opdracht maken door $4x^2 - 7x + 4$ gelijk te lezen als een functie $f(x)$ en de afgeleide $f'(x)$ te berekenen. Immers, $d\big(f(x)\big) = f'(x)\,dx$

We geven nog twee voorbeelden van werken met de rekenregels voor differentialen.

Voorbeeld

$$\begin{aligned} d\big(x^2\ln(x)\big) &= \ln(x)\cdot d(x^2) + x^2\cdot d\big(\ln(x)\big) \\ &= \ln(x)\cdot 2x\,dx + x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= 2x\ln(x)\,dx + x\,dx \\ &= x\big(1+2\ln(x)\big)\,dx \end{aligned}$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned} d(e^{\sin(x)}) &= d(e^u) && \text{met } u=\sin(x) \\ &= e^u\,du && \text{omdat } (e^u)' = e^u \\ &= e^{\sin(x)}\cdot d\big(\sin(x)\big) && \text{terugsubstitutie} \\ &= e^{\sin(x)}\cdot\cos(x)\,dx && \text{omdat } (\sin(x))' = \cos(x) \end{aligned}$$

Opgaven: Werken met differentialen

Vraag 1

Schrijf de volgende differentiaal in de vorm $f'(t)\,dt$.

$d(4t^5) = ($ .... $)\,dt$

Vraag 2

Schrijf de volgende differentiaal in de vorm $f'(x)\,dx$.

$d(5x^2 - 2x - 2) = ($ .... $)\,dx$

Vraag 3

Schrijf de volgende differentiaal in de vorm $f'(x)\,dx$.

$d\big(7x(x^6-7)\big) = ($ .... $)\,dx$

Vraag 4

Schrijf de volgende differentiaal in de vorm $f'(y)\,dy$.

$d\left(\frac{y^2-1}{y^2+4}\right) = ($ .... $)\,dy$

Vraag 5

Schrijf de volgende differentiaal in de vorm $f'(t)\,dt$.

$d\big(\ln(7t+7)\big) = ($ .... $)\,dt$

Vraag 6

Schrijf de volgende differentiaal in de vorm: $d\big(f(x)\big)$

$8x\,dx = d\big($ .... $\big)$

Vraag 7

Schrijf de volgende differentiaal in de vorm: $d\big(f(x)\big)$

$(x^2+10x-2)\cdot dx = d\big($ .... $\big)$

Vraag 8

Schrijf de volgende differentiaal in de vorm: $d\big(f(y)\big)$

$\frac{8}{7y+3}dy = d\big($ .... $\big)$

Vraag 9

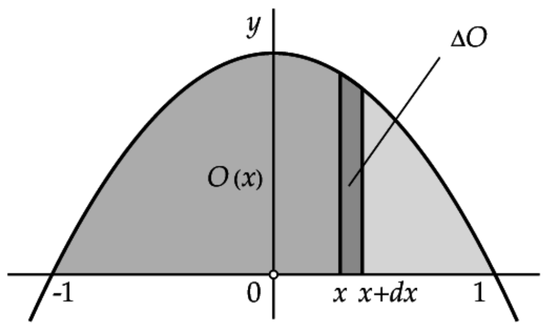
Schrijf de volgende differentiaal in de vorm: $d\big(f(y)\big)$

$\sin(4y)\,dy = d\big($ .... $\big)$

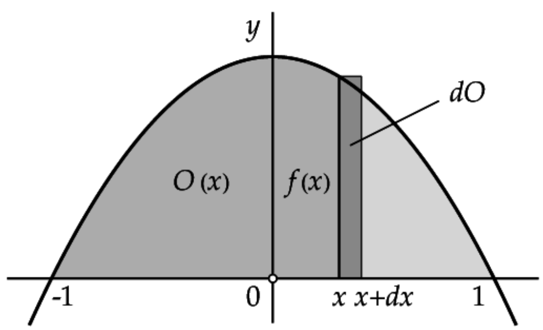
Theorie: Een oppervlakteberekening

We bekijken het volgende concrete voorbeeld van een oppervlakteberekening: gevraagd wordt de oppervlakte te berekenen van het gebied ingesloten door de x-as en de grafiek van de functie $f(x) = 1 - x^2$. Dit kan met een aanpak die lijkt op de methode besproken in de vorige sectie in het voorbeeld van de oppervlakteberekening van een cirkel via differentialen.

Laat $O(x)$ de oppervlakte zijn van het gebied ingesloten door de x-as, de verticale lijn door het punt $(x, 0)$ en de grafiek van $f(x)$. In het oorspronkelijke probleem wordt gevraagd $O(1)$. Voor een kleine toename dx is de toename $O(x + dx) - O(x)$ gelijk aan de oppervlakte van het gebied ingesloten door de x-as, de verticale lijnen door de punten $(x, 0)$ en $(x + dx, 0)$, en de grafiek van $f(x)$. Dit wordt in onderstaande figuur geïllustreerd.



De extra smalle strook die erbij gekomen is kan benaderd worden voor kleine dx met de rechthoekige strook met breedte dx en hoogte $f(x)$ zoals getoond in onderstaande figuur.



De oppervlakte van de smalle rechthoek is in dit geval gelijk aan $(1 - x^2)\,dx$. Dit is eigenlijk voor verwaarloosbare dx niets anders dan de differentiaal van de functie $O(x)$. Dus:

$$dO = (1 - x^2)\,dx.$$

Het rechterlid kan ook geschreven worden als $d(x - \frac{1}{3}x^3)$. Maar als differentialen van twee functies gelijk aan elkaar zijn dan verschillen deze functies slecht een constante van elkaar. Dus geldt in dit geval:

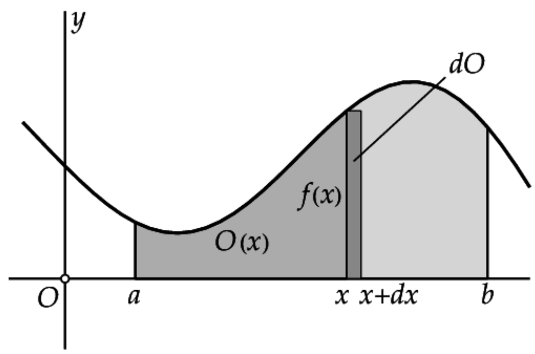
$$O(x) = x - \tfrac{1}{3}x^3 + c,$$

voor zekere constante c. Deze constante wordt vastgelegd door de eis dat $O(-1) = 0$.
Hieruit volgt dat $c = \frac{2}{3}$. Maar dan geldt: $O(1) = 1\frac{1}{3}$. Merk op dat voor de functie $O(x)$ geldt dat $O\,'(x) = (1 - x^2)$.

Theorie: Oppervlakte en primitieve functie

De eerdere aanpak van een oppervlakteberekening laat zich veralgemeniseren tot een berekening van de oppervlakte van een gebied ingesloten door de x-as, twee verticale lijnen met vergelijkingen $x = a$ en $x = b$, en de grafiek van een functie $f(x)$. Laat $F(x)$ een functie zijn met $F'(x) = f(x)$, dan heet $F(x)$ een **primitieve functie** van $f(x)$. Zo'n primitieve functie is niet uniek bepaald: voor elke constante c is de functie $G(x) = F(x) + c$ is ook een primitieve functie van $f(x)$.

Laat $O(x)$ de oppervlakte zijn van het gebied ingesloten door de x-as, de verticale lijnen door de punten $(a, 0)$ en $(x, 0)$, en de grafiek van $f(x)$. Onderstaande figuur illustreert deze situatie.



Net als in het concrete voorbeeld kan men dan kijken naar de toename $O(x + dx) - O(x)$, d.w.z. de oppervlakte van het gebied ingesloten door de x-as, de verticale lijnen door de punten $(x, 0)$ en $(x + dx, 0)$, en de grafiek van $f(x)$, voor kleine toename dx. Als voorheen kan de extra smalle strook die erbij gekomen is benaderd worden voor kleine dx met een rechthoekige strook met breedte dx en hoogte $f(x)$. Dit is eigenlijk voor verwaarloosbare dx niets anders dan de differentiaal van de functie $O(x)$. Dus:

$$dO = f(x)\,dx.$$

Met andere woorden:

$$O\,'(x) = f(x).$$

Dus is de functie $O(x)$ een primitieve functie van f en op een constante na gelijk aan $F(x)$. Omdat $O(a) = 0$ moet gelden dat $O(x) = F(x) - F(a)$. In het bijzonder is $O(b) = F(b) - F(a)$. Dit getal $F(b) - F(a)$ heet de **integraal** van de functie $f(x)$ over het gesloten interval $[a, b]$ en men hanteert de volgende notatie:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

De functie $f(x)$ noemt men de **integrand** en het teken $\displaystyle\int$ dat voor de differentiaal $f(x)\,dx$ staat heet het **integraalteken**. Dit teken is bedacht door Leibniz, een van de pioniers op het gebied van differentiaal- en integraalrekening.

Overigens, de **integratievariabele** x, die meestal een plaats aanduidt, speelt geen enkele speciale rol in bovenstaande berekening en kan door iedere andere nog beschikbare letter worden vervangen, bijvoorbeeld door de letter t die meestal gereserveerd wordt voor tijd. De context van de integraalberekening wijzigt, maar de berekening zelf blijft in essentie gelijk.

Voorbeeld: Hoofdstelling van de integraalrekening

Elke continue functie $f(x)$ op een interval I heeft een primitieve functie.
Als $F(x)$ zo'n primitieve functie van $f(x)$ op I is, dan geldt voor a en b in I

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

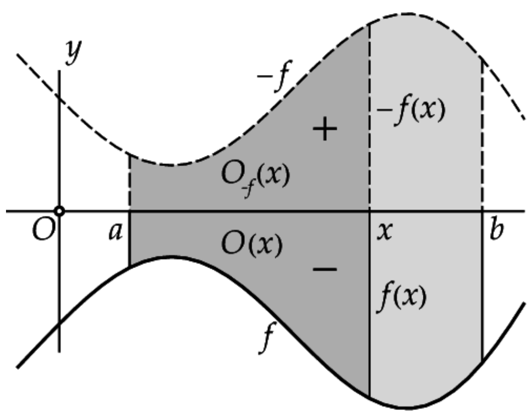
In plaats van $F(b) - F(a)$ wordt vaak $[F(x)]_a^b$ geschreven, dus

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Theorie: Verband tussen oppervlakte en integraal

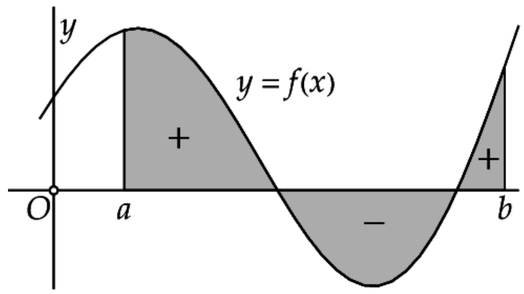
In de eerdere uitleg over oppervlakte en primitieve functie is stiekem verondersteld dat $f(x) \geq 0$ voor alle x in $[a,b]$. Maar wat te doen als de functie $f(x)$ ook negatieve waarden aanneemt?

Als $f(x) \leq 0$ voor alle x in $[a,b]$, dan is $-f(x) \geq 0$ en is de functie $O_{-f}(x)$ die de oppervlakte van het gebied ingesloten door de x-as, de verticale lijn door het punt $(x,0)$ en de grafiek van $-f(x)$ voorstelt een primitieve functie van $-f(x)$. Dit wordt geïllustreerd in onderstaande figuur.



Omdat $O'_{-f}(x) = -f(x)$, is dan $O(x) = -O_{-f}(x)$ op zijn beurt een primitieve functie van $f(x)$. Maar dit is tevens de oppervlakte op $[a,x]$ tussen de horizontale x-as en de grafiek van $f(x)$ voorzien van een minteken. Als de oppervlakte van een vlakdeel onder de horizontale as negatief geteld wordt, dan stelt $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ dus nog steeds de oppervlakte tussen de x-as, de grafiek van $f(x)$ en de verticale lijnen door $(a,0)$ en $(b,0)$ voor.

Als $f(x)$ op $[a,b]$ van teken wisselt, moeten positieve en negatieve bijdragen met elkaar gecombineerd worden. Voor vlakdelen waar de functiewaarden negatief zijn moeten de oppervlakte dus negatief meegeteld worden. In onderstaande figuur zijn er op het interval twee vlakdelen met een positieve bijdrage en één vlakdeel met een negatieve bijdrage aan de oppervlakte.



In deze interpretatie van oppervlakte blijft dus de volgende bewering waar:

Regel

De integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ is gelijk aan de oppervlakte tussen de grafiek van $f(x)$, de horizontale as en de verticale lijnen door de punten $(a,0)$ en $(b,0)$, waarbij de oppervlakte van de vlakdelen onder de horizontale as negatief geteld moet worden.

Theorie: Algemene definitie en basisregels van integralen

Laat $F(x)$ een primitieve functie van $f(x)$ op een interval I zijn. Voor $a<b$ in I is het verschil tussen $F(b)-F(a)$ gelijk aan de oppervlakte van een vlakdeel en onafhankelijk van de keuze van de primitieve functie $F(x)$. Dit verschil heet ook wel de **integraal** van $f(x)$ met **ondergrens** a en **bovengrens** b, genoteerd als $\int_a^b f(x)\,dx$, en kan ook berekend worden ingeval $a \geq b$.

Uit de algemenere integraaldefinitie volgen direct de volgende eigenschappen:

Voorbeeld: Eigenschappen van integralen

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{voor elke constante } c$$

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \quad \text{voor alle } a,b,c \text{ in } I$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(\xi)\,d\xi\right) = f(x) \quad \text{en} \quad \frac{d}{dx}\left(\int_x^b f(\xi)\,d\xi\right) = -f(x)$$

Opgaven: Berekenen van een oppervlakte

Vraag 1.1

Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel dat begrensd wordt door de x-as en de grafiek van de functie $f(x) = x - x^2$ tussen de punten $(0,0)$ en $(1,0)$.

Oppervlakte = ...

Vraag 1.2

Laat $O(x)$ voor een getal x tussen 0 en 1 de oppervlakte van het vlakdeel zijn dat begrensd wordt door de x-as, de grafiek van de functie $f(x) = x - x^2$ en de verticale lijnen door de punten $(0,0)$ en $(x,0)$. Dan geldt de volgende gelijkheid van differentialen

$$dO = (x - x^2)dx$$

Schrijf het rechterlid in de vorm $d\big(F(x)\big)$

$x - x^2 = d\big($ .... $\big)$

Vraag 1.3

Laat $O(x)$ voor een getal x tussen 0 en 1 de oppervlakte van het vlakdeel zijn dat begrensd wordt door de x-as, de grafiek van de functie $f(x) = x - x^2$ en de verticale lijnen door de punten $(0,0)$ en $(x,0)$. Dan geldt de volgende gelijkheid van differentialen

$$dO = (x - x^2)dx = d\big(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\big)$$

Wat is dan de algemene formule voor $O(x)$?

$O(x) =$ ....

Vraag 1.4

Laat $O(x)$ voor een getal x tussen 0 en 1 de oppervlakte van het vlakdeel zijn dat begrensd wordt door de x-as, de grafiek van de functie $f(x) = x - x^2$ en de verticale lijnen door de punten $(0,0)$ en $(x,0)$. Dan geldt

$$O(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + c$$

voor zekere constante c. Bereken de waarde van c.

$c =$ ....

Vraag 1.5

Laat $O(x)$ voor een getal x tussen 0 en 1 de oppervlakte van het vlakdeel zijn dat begrensd wordt door de x-as, de grafiek van de functie $f(x) = x - x^2$ en de verticale lijnen door de punten $(0,0)$ en $(x,0)$. Dan geldt

$$O(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

Bereken $O(1)$. Dit is in dit geval de oppervlakte van het vlakdeel dat begrensd wordt door de x-as en de grafiek van de functie $f(x) = x - x^2$ tussen de punten $(0,0)$ en $(1,0)$.

$O(1) =$ ....

Vraag 2

Bereken de volgende integraal

$$\int_1^{25} \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx$$

$\int_1^{25} \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx =$ ....

Vraag 3

Bereken de volgende integraal

$$\int_0^5 \frac{1}{z+5}\,dz$$

$\int_0^5 \frac{1}{z+5}\,dz =$ ....

Vraag 4

Bereken de volgende integraal

$$\int_0^1 e^{-y}\,dy$$

$\int_0^1 e^{-y}\,dy =$ ....

Theorie: Primitiveren

Het zoeken naar een primitieve functie van een gegeven functie op een interval, d.w.z. het opsporen van een functie $F(x)$ voor een gegeven functie $f(x)$ op een interval I met de eigenschap dat $F'(x) = f(x)$, heet **primitiveren** of **integreren**. Voor deze primitieve functie geldt voor iedere a en x in I

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(\xi)\, d\xi.$$

Elke primitieve functie van $f(x)$ op I is op deze manier te schrijven. Men geeft zo'n primitieve functie van $f(x)$ vaak zonder onder- en bovengrens aan met de notatie

$$\int f(x)\, dx$$

en spreekt dan van een **onbepaalde integraal**. De onbepaaldheid schuilt in het gegeven dat een primitieve functie van $f(x)$ slechts uniek bepaald is op een **integratieconstante** na. Een eenvoudig voorbeeld van een onbepaalde integraal op $I = (-\infty, \infty)$ is

$$\int (2x+3)\, dx = x^2 + 3x + c$$

waarbij de integratieconstante aangeduid is met de letter c. Veel wiskundige software zoals de computeralgebra-systemen Maple en *Mathematica* laten overigens de integratieconstante achterwege en geven slechts één primitieve functie.

Theorie: Directe integratie

Naast de al eerder besproken rekenregels voor differentialen hebben we ook een voorraad van standaardprimitieven. Bij **directe integratie** vinden we de primitieve functie uit deze lijst, eventueel aangevuld met eenvoudige toepassingen van rekenregels of een gok op goed geluk. Hieronder staat onze lijst van standaardprimitieven en we geven enkele voorbeelden van directe integratie.

Functie	*Primitieve*
x^p	$\frac{1}{p+1}x^{p+1}$ mits $p \neq -1$
$\frac{1}{x+a}$	$\ln(\lvert x+a \rvert)$
a^x	$\frac{1}{\ln(a)}a^x$ voor elke $a > 0,\ a \neq 1$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$

Merk op dat de variabele x een 'dummy variabele' is die door iedere andere beschikbare variabele vervangen mag worden

Enkele voorbeelden
Uit de tabel halen we onmiddellijk

Voorbeeld

$$\int x^7\, dx = \frac{1}{8}x^8 + c.$$

Door toepassing van de somregel van integreren vinden we ook

Voorbeeld

$$\int (4t^3 - t)\, dt = t^4 - \tfrac{1}{2}t^2 + c.$$

Voorbeeld

Voor de primitieve van $\cos(2t-1)$ kun je een gokje wagen, bijvoorbeeld op basis van bovenstaande tabel $\sin(2t-1)$. De afgeleide hiervan is echter via de kettingregel voor differentiëren gelijk aan $2\cos(2t-1)$, oftewel een factor 2 te groot. Dus:

$$\int \cos(2t-1)\,dt = \tfrac{1}{2}\sin(2t-1) + c.$$

Opgaven: Primitiveren

Vraag 1.1

Bereken de volgende integraal:

$$\int \left(-3y^4 + \frac{2}{y^4}\right) dy$$

$\int \left(-3y^4 + \frac{2}{y^4}\right) dy =$ ....

Vraag 1.2

Splits de integraal als som van 2 afzonderlijke integralen op de voor de hand liggende wijze.

$\int \left(-3y^4 + \frac{2}{y^4}\right) dy = \int$ .... $dy +$

$\int$ .... dy

Vraag 1.3

Bereken de volgende integraal:

$$\int -3y^4\,dy$$

$\int -3y^4\,dy =$ ....

Vraag 1.4

Bereken de volgende integraal:

$$\int \frac{2}{y^4}\,dy$$

$\int \frac{2}{y^4}\,dy =$ ....

Vraag 1.5

Pas nu de somregel toe om de oorspronkelijke integraal te berekenen:

$$\int \left(-3y^4 + \frac{2}{y^4}\right) dy$$

$\int \left(-3y^4 + \frac{2}{y^4}\right) dy =$ ....

Vraag 2.6

Bereken de volgende integraal:

$$\int \frac{7t^7 + 7}{8t^4}\,dt$$

$\int \frac{7t^7 + 7}{8t^4}\,dt =$ ....

Vraag 2.7

Schrijf de integrand $\frac{7t^7 + 7}{8t^4}$ op de meest voor de hand liggende manier als som van twee losse breuken.

$\frac{7t^7 + 7}{8t^4} =$ .... $+$

....

Vraag 2.8

Bereken de volgende integraal:

$$\int \frac{7}{8} t^3 \, dt$$

$\displaystyle\int \frac{7}{8} t^3 \, dt =$ ....

Vraag 2.9

Bereken de volgende integraal:

$$\int \frac{7}{8} t^{-4} \, dt$$

$\displaystyle\int \frac{7}{8} t^{-4} \, dt =$ ....

Vraag 2.10

Pas nu de somregel toe om de oorspronkelijke integraal te berekenen:

$$\int \left(\frac{7t^7 + 7}{8t^4} \right) dt = \int \frac{7}{8} t^3 \, dt + \int \frac{7}{8} t^{-4} \, dt$$

$\displaystyle\int \frac{7t^7 + 7}{8t^4} \, dt =$ ....

Theorie: Inleiding

Bij directe integratie hebben we eigenlijk al twee rekenregels voor integreren toegepast:

constante factorregel: Een constante factor mag buiten de integraal worden gebracht:

$$\int c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int f(x) \, dx.$$

somregel: De integraal van de som van twee functies is de som van de twee integralen:

$$\int \big(f(x) + g(x) \big) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx.$$

Deze twee regels voor integreren corresponderen met twee rekenregels voor differentiëren. We bekijken nog meer vertalingen van rekenregels voor differentiëren naar technieken om primitieve functies uit te rekenen.

Het is overigens niet waar dat men voor elke wiskundige functie een primitieve functie in formulevorm, d.w.z. in termen van standaardfuncties (machten, exponentiële functies, logaritmen, trigonometrische functies, etc.), kan vinden. Een van de hoogtepunten van de integraalrekening is het Risch algoritme dat beslist of een functie een integraal in elementaire formulevorm heeft en zo ja, wat de wiskundige formule dan precies is. Dit wiskundige algoritme is erg gecompliceerd en is niet gebaseerd op de technieken die in deze sectie aan bod komen.

Theorie: Substitutieregel

Veronderstel eens dat F een primitieve functie is van f en dat de functie g een nette functie is. Volgens de kettingregel voor differentiëren geldt dan:

$$\frac{d}{dx}\Big(F\big(g(x)\big)\Big) = f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$$

In termen van differentialen is de bewering:

$$d\Big(F\big(g(x)\big)\Big) = f\big(g(x)\big)\cdot d\big(g(x)\big) = f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,dx$$

Dus geldt de volgende substitutieregel:

$$\int f\big(g(x)\big)\,g'(x)\,dx = \int d\Big(F\big((g(x)\big)\Big) = F\big((g(x)\big) + c$$

Als $u = g(x)$ en dus $du = g'(x)dx$, dan kan bovenstaande regel ook met expliciete vermelding van de gebruikte substitutie opgeschreven worden

$$\int f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,dx = [u = g(x), du = g'(x)\,dx] = \int f(u)\,du = F(u) + c = F\big(g(x)\big) + c$$

Voorbeelden illustreren het gebruik van de substitutieregel.

Voorbeeld

$$\int (x^3 - x)^4(3x^2 - 1)\,dx = ?$$

Stel $u = x^3 - x$, dan $du = u'(x)\,dx = (3x^2 - 1)\,dx$. Door substitutie krijgen we dus:

$$\begin{aligned}\int (x^3 - x)^4(3x^2 - 1)\,dx &= \int u^4\,du \\ &= \tfrac{1}{5}u^5 + c \\ &= \tfrac{1}{5}(x^3 - x)^5 + c\end{aligned}$$

In de notatie van differentialen kun je ook de oplossing opschrijven, maar dit is misschien lastiger te lezen:

$$\begin{aligned}\int (x^3 - x)^4(3x^2 - 1)\,dx &= \int (x^3 - x)^4\,d\big(x^3 - x\big) \\ &= \int d\big(\tfrac{1}{5}(x^3 - x)^5\big) \\ &= \tfrac{1}{5}(x^3 - x)^5 + c\end{aligned}$$

Voorbeeld

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = ?$$

Stel $u = 1 + x^2$, dan $du = 2x\,dx$. Door substitutie krijgen we dus:

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{u}\,du$$

$$= \tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \tfrac{2}{3}u\sqrt{u} + c$$

$$= \tfrac{2}{3}(1+x^2)\sqrt{1+x^2} + c$$

Voorbeeld

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = ?$$

Stel $u = \sqrt{x}$, dan $x = u^2$ en $dx = 2u\,du$. Door substitutie krijgen we dus:

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2u}{u^2+u}\,du$$

$$= 2\int \frac{1}{u+1}\,du$$

$$= 2\ln(u+1) + c$$

$$= 2\ln(\sqrt{x}+1) + c$$

Voorbeeld

$$\int 2t^3 e^{-t^2}\,dt = ?$$

Stel $u = t^2$, dan $du = 2t\,dt$. Door substitutie krijgen we dus:

$$\begin{aligned}
\int 2t^3 e^{-t^2}\,dt &= \int u e^{-u}\,du \\
&= \int e^{-u}\,du + \int \left(ue^{-u} - e^{u}\right)\,du \\
&= \int e^{-u}\,du + \int d\left(-ue^{-u}\right) \\
&= -e^{-u} - ue^{-u} + c \\
&= -(1+u)e^{-u} + c \\
&= -(1+t^2)e^{-t^2} + c
\end{aligned}$$

Als er integratiegrenzen staan, d.w.z. als je een bepaalde integraal wilt uitrekenen, dan kun je de grenzen gelijk meenemen en is terugsubstitutie niet meer nodig. Een enkel voorbeeld moge dit duidelijk maken:

Voorbeeld

$$\int_0^1 x(x-1)^8\,dx = ?$$

Stel $u = x - 1$, dan $du = dx$ en de integratiegrenzen veranderen in $0 - 1 = -1$ en $1 - 1 = 0$. Dus:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x(x-1)^8\,dx &= \int_{-1}^0 (u+1)u^8\,du \\
&= \int_{-1}^0 (u^9 + u^8)\,du \\
&= \left[\frac{1}{10}u^{10} + \frac{1}{9}u^9\right]_{-1}^0 \\
&= \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{1}{90}
\end{aligned}$$

Voorbeeld

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,dx = ?$$

Stel $u = x^2$, dan $dx = 2x\,dx$. en de integratiegrenzen veranderen in 0 en π. Door substitutie krijgen we dus:

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,dx &= \int_0^{\pi} \tfrac{1}{2}\sin(u)\,du \\ &= \Big[-\tfrac{1}{2}\cos(u)\Big]_0^{\pi} \\ &= -\tfrac{1}{2}\big(\cos(\pi)-\cos(0)\big) = 1\end{aligned}$$

Theorie: Partiële integratie

In het voorlaatste voorbeeld van de substitutieregel hebben we een truc uitgehaald om de primitieve van $u\,e^{-u}$ te kunnen bepalen. Met de methode van **partieel integreren** had dit ook gekund. Deze methode is gebaseerd op de productregel voor differentiëren, die in termen van differentialen ook geformuleerd is als

$$f(x)\,d\big(g(x)\big) = d\big(f(x)g(x)\big) - g(x)d\big(f(x)\big)$$

ofwel

$$f(x)\,g'(x)\,dx = d\big(f(x)g(x)\big) - g(x)\,f'(x)\,dx)$$

Dus geldt:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx.$$

Als $u = f(x)$ en $v = g(x)$ en dus $du = f'(x)\,dx$ en $dv = g'(x)\,dx$, dan kan bovenstaande regel ook opgeschreven worden als

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Voorbeeld

Laten we nu eens de onbepaalde integraal $\displaystyle\int x\,e^{-x}\,dx$ berekenen door partieel integreren. Neem eens $u = x,\ dv = e^{-x}dx$, dan $du = dx$ en voor v mogen we nemen $v = -e^{-x}$. Dan geldt:

$$\begin{aligned}\int x\,e^{-x}\,dx &= \int u\,dv\\ &= uv - \int v\,du\\ &= -xe^{-x} - \int \left(-e^{-x}\right)\,dx\\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + c\\ &= -(x+1)e^{-x} + c\end{aligned}$$

Dit voorbeeld illustreert dat men bij partieel integreren een zekere factor van de integrand 'achter de d brengt'. Welke factor het handigst is kan alleen door uitproberen achterhaald worden. Het gaat er meestal steeds om welke factor van de integrand men als afgeleide van een functie beschouwd en welke factor gemakkelijk te differentiëren is zodanig dat de integraal aan de rechterzijde van de regel van partieel integreren eenvoudiger is dan de integraal waarmee men begon. In bovenstaand voorbeeld hebben we e^{-x} beschouwd als gemakkelijk te primitiveren factor (nl. met $-e^{-x}$ als primitieve functie) en x als factor met een eenvoudige afgeleide (nl. met afgeleide 1). Dus:

$$\begin{aligned}\int xe^{-x}\,dx &= \int x\cdot\left(-e^{-x}\right)'\,dx\\ &= -xe^{-x} - \int 1\cdot\left(-e^{-x}\right)\,dx\\ &= -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx\\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + c\\ &= -(x+1)e^{x} + c\end{aligned}$$

Nog een paar voorbeelden helpen bij het begrijpen van de methode van partieel integreren.

Voorbeeld

$$\int \ln(x)\,dx = ?$$

Als $u = \ln(x)$, $dv = dx$, dan $v = x$ en $du = \dfrac{1}{x}\,dx$, en we krijgen met de regel voor partieel integreren dus:

$$\begin{aligned}
\int \ln(x)\,dx &= \int u\,dv \\
&= uv - \int v\,du \\
&= x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx \\
&= x\ln(x) - \int dx \\
&= x\ln(x) - x + c \\
&= x(\ln(x) - 1) + c
\end{aligned}$$

In de notatie zonder expliciet u en v te benoemen verloopt de berekening als volgt:

$$\begin{aligned}
\int \ln(x)\,dx &= \int \ln(x) \cdot (x)'\,dx \\
&= x\ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot x\,dx \\
&= x\ln(x) - \int dx \\
&= x\ln(x) - x + c \\
&= x(\ln(x) - 1) + c
\end{aligned}$$

Het is een kwestie van smaak welke notatie men het meest praktisch vindt. In de resterende voorbeelden gebruiken we de tweede notatie.

Voorbeeld

$$\int x^2 e^{3x}\,dx = ?$$

De berekening start als volgt:

$$\int x^2 e^{3x}\,dx = \int x^2 \cdot \left(\tfrac{1}{3}e^{3x}\right)'\,dx$$

$$= \tfrac{1}{3}x^2 e^{3x} - \int 2x \cdot \tfrac{1}{3}e^{3x}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{3}x^2 e^{3x} - \tfrac{2}{3}\int x e^{3x}\,dx.$$

Misschien denk je dat we weinig opgeschoten zijn, maar de macht van x voor de exponentële term is wel in graad met 1 verlaagd. Dit spel kunnen we herhalen

$$\int x e^{3x}\,dx = \int x \cdot \left(\tfrac{1}{3}e^{3x}\right)'\,dx$$

$$= \tfrac{1}{3}x e^{3x} - \int 1 \cdot \tfrac{1}{3}e^{3x}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{3}x e^{3x} - \tfrac{1}{3}\int e^{3x}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{3}x e^{3x} - \tfrac{1}{9}e^{3x} + c.$$

In combinatie levert dit dus op:

$$\int x^2 e^{3x}\,dx = \tfrac{1}{3}x^2 e^{3x} - \tfrac{2}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{3}x e^{3x} - \tfrac{1}{9}e^{3x}\right)$$

$$= \tfrac{1}{27}(9x^2 - 6x + 2)e^{3x} + c$$

Voorbeeld

$$\int_0^{\pi} t\sin(t)\,dt = ?$$

De berekening gaat als volgt:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} t\sin(t)\,dt &= \int_0^{\pi} t\cdot\big(-\cos(t)\big)'\,dt\\ &= \Big[t\cdot\big(-\cos(t)\big)\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1\cdot\big(-\cos(t)\big)\,dt\\ &= \Big[-t\cos(t)\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos(t)\,dt\\ &= \Big[-t\cos(t)+\sin(t)\Big]_0^{\pi}\\ &= \pi\end{aligned}$$

Voorbeeld

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x^2\cos(x)\,dx = ?$$

De berekening gaat als volgt: Als $u = x^2$, $dv = \cos(x)dx$, dan $v = \sin(x)$ en $du = 2x\,dx$, en we krijgen met de regel voor partieel integreren dus:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x^2\cos(x)\,dx &= \Big[x^2\sin(x)\Big]_0^{\frac{1}{2}\pi} - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} 2x\sin(x)\,dx\\ &= \frac{\pi^2}{4} - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} 2x\sin(x)\,dx\end{aligned}$$

We lijken nog niet veel opgeschoten, maar vergis je niet: de graad van de macht voor de goniometrische functie is afgenomen. Als we dat nog één keer voor elkaar kirjgen, dan hebben we een standaardintegraal te pakken. Dus, we doen nog een keer partiële integratie. We nemen $u = 2x$, $dv = \sin(x)dx$ en dus $v = -\cos(x)$ en $du = 2\,dx$. Met de regel voor partieel integreren krijgen we dan:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} 2x\sin(x)\,dx &= \Big[-2x\cos(x)\Big]_0^{\frac{1}{2}\pi} + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} 2\cos(x)\,dx\\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} 2\cos(x)\,dx\\ &= \Big[2\sin(x)\Big]_0^{\frac{1}{2}\pi}\\ &= 2\end{aligned}$$

Samenvattend hebben we dus:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x^2 \cos(x)\,dx = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

Theorie: Breuksplitsing

Bij rationale functies is soms een aanpak effectief waarbij een breuk herschreven wordt als som van eenvoudigere breuken. Deze methode staat bekend als **breuksplitsing**. Enkel voorbeelden illustreren deze aanpak.

Voorbeeld

$$\int \frac{1}{y(1-y)}\,dy$$

Bij breuksplitsen zoekt men eerst A en B zodanig dat

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y}.$$

Om A en B op te sporen werken we het rechterlid uit door de termen onder één noemer te brengen:

$$\frac{A}{y} + \frac{B}{1-y} = \frac{A(1-y)}{y(1-y)} + \frac{By}{y(1-y)} = \frac{A(1-y)+By}{y(1-y)} = \frac{(B-A)y+A}{y(1-y)}.$$

Hieruit volgen de vergelijkingen $B-A=0$ en $A=1$. Dus: $A=1$ en $B=1$, oftewel:

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}.$$

Maar dan geldt ook:

$$\int \frac{1}{y(1-y)}\,dy = \int \frac{1}{y}\,dy + \int \frac{1}{1-y}dy = \ln\big(|y|\big) - \ln\big(|1-y|\big) + c.$$

Voorbeeld

$$\int \frac{5x-4}{2x^2+x-1}\,dx$$

De methode van breuksplitsing verloopt als volgt:

$$\begin{aligned}\int \frac{5x-4}{2x^2+x-1}\,dx &= \int \frac{5x-4}{(x+1)(2x-1)}\,dx \\ &= \int \left(\frac{3}{x+1} + \frac{-1}{2x-1}\right) dx \\ &= 3\ln|x+1| - \tfrac{1}{2}\ln|2x-1|\end{aligned}$$

In de eerste stap wordt de noemer ontbonden in factoren. De tweede stap is het eigenlijke breuksplitsen, waarna de primitieve zo opgeschreven kan worden. Het breuksplitsen wordt hier als volgt uitgevoerd. Schrijf

$$\frac{5x-4}{(x+1)(2x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1}$$

Als we de rechterkant onder een noemer brengen, krijgen we

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1} = \frac{A(2x-1)+B(x+1)}{(x+1)(2x-1)} = \frac{(2A+B)x+(-A+B)}{(x+1)(2x-1)}$$

Vergelijken we dit met de oorspronkelijke breuk, dan zien we dat $5x-4 = (2A+B)x + (-A+B)$, oftewel

$$\begin{cases} 2A+B &= 5, \\ -A+B &= -4. \end{cases}$$

Uit deze twee vergelijkingen lossen we de twee onbekenden A, B op: $A = 3$ en $B = -1$.

Voorbeeld

$$\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\,dx$$

De methode van breuksplitsing verloopt als volgt:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\,dx &= \int \frac{2x^2-x+4}{x(x^2+4)}\,dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4}\right) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+4} + \frac{-1}{x^2+4}\right) dx \\ &= \ln|x| + \tfrac{1}{2}\ln|x^2+4| - \tfrac{1}{2}\arctan(\tfrac{1}{2}x)\end{aligned}$$

In de eerste stap wordt de noemer ontbonden. Merk op dat x^2+4 niet verder ontbonden kan worden. De tweede stap is het breuksplitsen; hier worden A, B, C opgelost uit

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+4}$$

De berekening, die we achterwege laten, geeft $A = 1, B = 1, C = -1$. Omdat $x^2 + 4$ een kwadratische term is, staat in de noemer hierbij eeneerstegraads veelterm. Ten slotte wordt de integraal $\int \frac{x-1}{x^2+4}\,dx$ nog gesplitst in twee integralen, namelijk $\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$ en $\int \frac{-1}{x^2+4}\,dx$.

De eerste hiervan kan met de substitutie $u = x^2 + 4$ worden aangepakt: met $du = 2xdx$ krijgen we

$$\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \int \frac{1}{2}\frac{1}{u}\,du = \tfrac{1}{2}\ln|u| = \tfrac{1}{2}\ln|x^2+4|$$

De tweede kan vereenvoudigd worden met de substitutie $x = 2v$. Dan zien we, met $dx = 2dv$,

$$\int \frac{-1}{x^2+4}\,dx = \int 2\frac{-1}{4v^2+4}\,dv = -\tfrac{1}{2}\int \frac{1}{v^2+1}\,dv = \tfrac{1}{2}\arctan(v) = \tfrac{1}{2}\arctan(\tfrac{1}{2}x)$$

De volgende twee voorbeelden dienen om duidelijk te maken hoe te breuksplitsen als er machten van veeltermen in de noemer staan.

Voorbeeld

Er geldt

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-x - \frac{1}{2}}{(x+1)^2}$$

Schrijf, om dit te vinden, $\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x+1)^2}$ en los A, B, C op. Merk op dat er een term met $(x+1)^2$ in de noemer blijft, waarbij de macht van de teller één kleiner is.

Voorbeeld

Beschouw de functie

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x(x+1)^2}$$

De teller bevat een term van graad vier (als hoogst voorkomende macht), dit is hoger dan de derdegraads term die als hoogste macht in de noemer voorkomt bij wegwerken van de haakjes. Om de primitieve van $f(x)$ te vinden, kunnen we eerst met een staartdeling de teller door de noemer delen, om zo $f(x)$ te herschrijven tot een veelterm plus als restterm een rationale functie met noemer $x(x+1)^2 = x^3 + 2x^2 + x$ en een teller met termen van graad kleiner dan 3. Namelijk

$$x^4 - 1 = x\left(x^3 + 2x^2 + x\right) - 2x^3 - x^2 =$$

$$= x\left(x^3 + 2x^2 + x\right) - 2\left(x^3 + 2x^2 + x\right) + 3x^2 + 2x$$

Hieruit volgt:

$$\frac{x^4-1}{x(x+1)^2} = x-2+\frac{3x^2+2x}{x(x+1)^2}$$

$$= x-2+\frac{3x+2}{(x+1)^2}$$

Opgaven: Toepassen van integratietechnieken

Vraag 1.1

Bereken de volgende integraal:

$$\int (9z+9)^6\,dz$$

$\int (9z+9)^6\,dz =$ ....

Vraag 1.2

Pas de substitutie $u = 9z+9$ toe op de volgende integraal

$$\int (9z+9)^6\,dz$$

Welke integraal in u krijg je dan?

$\int$ .... du

Vraag 1.3

Na substitutie $u = 9z+9$ wordt de integraal $\int (9z+9)^6\,dz$ vervangen door de eenvoudigere integraal

$$\int \frac{1}{9}u^6\,du$$

Reken deze onbepaalde integraal uit.

$\int \frac{1}{9}u^6\,du =$ ....

Vraag 1.4

We hebben de volgende integraal

$$\int (9z+9)^6\,dz$$

via de substitutie $u = 9z + 9$ al teruggebracht tot het integraalprobleem

$$\int \frac{1}{9}u^6$$

dat de oplossing

$$\frac{1}{63}u^7 + c$$

heeft.
Wat betekent dit voor het oorspronkelijke integraalprobleem?

$\int (9z+9)^6\,dz =$ ....

Vraag 2.5

Bereken de volgende integraal:

$$\int 2e^{5t+3}\,dt$$

$\int 2e^{5t+3}\,dt =$ ....

Vraag 2.6

Om de integraal:

$$\int 2e^{5t+3}\,dt$$

te berekenen is de substitutiemethode aan te bevelen.
Welke substitutie $u = \ldots$ ligt het meest voor de hand?

$u =$ ....

Vraag 2.7

Pas de substitutie $u = 5t + 3$ toe op de volgende integraal

$$\int 2e^{5t+3}\,dt$$

Welke integraal in u krijg je dan?

$\int$ .... du

Vraag 2.8

Na substitutie $u = 5t+3$ wordt de integraal $\int 2e^{5t+3}\,dt$ vervangen door de eenvoudigere integraal

$$\int \frac{2}{5}e^u\,du$$

Reken deze onbepaalde integraal uit.

$\int \frac{2}{5}e^u\,du =$ ....

Vraag 2.9

We hebben de volgende integraal

$$\int 2e^{5t+3}\,dt$$

via de substitutie $u = 5t + 3$ al teruggebracht tot het integraalprobleem

$$\int \frac{2}{5}e^u\,du$$

dat de oplossing

$$\frac{2}{5}e^u + c$$

heeft.
Wat betekent dit voor het oorspronkelijke integraalprobleem?

$\int 2e^{5t+3}\,dt =$ ....

Vraag 3

Bereken de volgende integraal:

$$\int \cos(3y)e^{\sin(3y)}\,dy$$

$\int \cos(3y)e^{\sin(3y)}\,dy =$ ....

Vraag 4

Bereken de volgende integraal met behulp van de subsitutieregel:

$$\int x(3x-5)^4\,dx$$

$\int x(3x-5)^4\,dx =$ ....

Vraag 5.1

Bereken de volgende integraal:

$$\int_0^3 \sqrt{y+1}\,dy$$

$\int_0^3 \sqrt{y+1}\,dy =$ ....

Vraag 5.2

Om de integraal:

$$\int_0^3 \sqrt{y+1}\,dy$$

te berekenen is de substitutiemethode aan te bevelen. De substitutie $u = y + 1$ ligt het meest voor de hand.
Wat worden dan de nieuwe integrand en integratiegrenzen?

integrand = ...

ondergrens = ...

bovengrens = ...

Vraag 5.3

Na substitutie $u = y + 1$ wordt de integraal

$$\int_0^3 \sqrt{y+1}\, dy$$

vervangen door de eenvoudigere integraal

$$\int_1^4 u^{\frac{1}{2}}\, du$$

Reken deze laatste integraal uit.

$\int_1^4 u^{\frac{1}{2}}\, du =$ ....

Vraag 6

Bereken de volgende integraal via partieel integreren:

$$\int_1^2 t^4 \ln(t)\, dt$$

$\int_1^2 t^4 \ln(t)\, dt =$ ....

Theorie: Inleiding

Tot nu toe hebben we bepaalde integralen over nette functies berekend. Maar sommige bepaalde integralen kunnen alleen via limieten gedefinieerd worden. Zulke integralen heten **oneigenlijke integralen**. We onderscheiden daarbij twee typen: bij het eerste type heeft het integratiegebied oneindige lengte, en bij het tweede type is de intergrand niet continu in een randpunt van het integratie-interval omdat daar een verticale aymptoot optreedt. Bij beide types gaan we er overigens van uit dat de integrand continu is behalve eventueel in de randpunten van het integratie-interval; er bestaan dus primitieve functies van de gegeven integrand.

Theorie: Oneigenlijke integralen van type 1

Laat $f(x)$ een gegeven integrand zijn en $F(x)$ een primitieve van $f(x)$. We bekijken drie gevallen van integratiegebieden met oneindige lengte.

Regel

Als $f(x)$ continu is op het interval $[a,\infty)$ en als $\lim\limits_{N\to\infty} F(N)$ bestaat, dan is

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_a^N f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} F(N) - F(a).$$

Regel

Als $f(x)$ continu is op het interval $(-\infty,b]$ en als $\lim\limits_{M\to-\infty} F(M)$ bestaat, dan is

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{M\to-\infty}\int_M^b f(x)\,dx = F(b) - \lim_{M\to-\infty} F(M).$$

Regel

Als $f(x)$ continu is op $(-\infty,\infty)$, als de limieten $\lim\limits_{N\to\infty} F(N)$ en $\lim\limits_{M\to-\infty} F(M)$ bestaan en als minstens één van beide eindig is, dan is

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty}\lim_{N\to-\infty}\int_M^N f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} F(N) - \lim_{M\to-\infty} F(M).$$

Enkele voorbeelden ter illustratie.

Voorbeeld

Bereken de volgende oneigenlijke integraal als deze bestaat.

$$\int_3^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\int_3^\infty \frac{1}{x^3}\,dx &= \lim_{N\to\infty}\int_3^N \frac{1}{x^3}\,dx \\
&= \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{2\,x^2}\right]_3^N \\
&= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{18} - \frac{1}{2\,N^2}\right) \\
&= \frac{1}{18}
\end{aligned}$$

Voorbeeld

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \infty$$

Immers: $\displaystyle\int_0^N \frac{1}{x}\,dx = \big[\ln(x)\big]_1^N = \ln(N)$ en $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \ln(N) = \infty$.

Voorbeeld

Bereken de volgende oneigenlijke integraal als deze bestaat.

$$\int_{-\infty}^{0} e^{3x}\,dx$$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} e^{3x}\,dx &= \lim_{M\to-\infty} \int_M^0 e^{3x}\,dx\\ &= \lim_{M\to-\infty} \left[\frac{e^{3\,x}}{3}\right]_M^0\\ &= \lim_{M\to-\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{e^{3\,M}}{3}\right)\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Voorbeeld

Bereken de volgende oneigenlijke integraal als deze bestaat.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{9+x^2}\,dx$$

Uitwerking:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{9+x^2}\,dx &= \lim_{M\to-\infty}\lim_{N\to\infty}\int_M^N \frac{1}{9+x^2}\,dx \\
&= \lim_{M\to-\infty}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{3}\int_M^N \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\,d\left(\frac{x}{3}\right) \\
&= \lim_{M\to-\infty}\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right]_M^N \\
&= \frac{1}{3}\left(\lim_{N\to\infty}\arctan\left(\frac{N}{3}\right)-\lim_{M\to-\infty}\arctan\left(\frac{M}{3}\right)\right) \\
&= \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\pi-(-\tfrac{1}{2}\pi)\right) \\
&= \tfrac{1}{3}\pi
\end{aligned}
$$

Theorie: Oneigenlijke integralen van type 2

Laat $f(x)$ een gegeven integrand zijn en $F(x)$ een primitieve van $f(x)$. We bekijken drie gevallen van integratiegebieden met $f(x)$ discontinu in minstens één van de randpunten.

Regel

Als $f(x)$ continu is op het interval $[a,b)$ en als $\lim_{v\uparrow b} F(v)$ bestaat, dan is

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{v\uparrow b}\int_a^v f(x)\,dx = \lim_{v\uparrow b} F(v) - F(a)$$

Regel

Als $f(x)$ continu is op het interval $(a,b]$ en als $\lim_{u\downarrow a} F(u)$ bestaat, dan is

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{u\downarrow a}\int_u^b f(x)\,dx = F(b) - \lim_{u\downarrow a} F(u)$$

Regel

Als $f(x)$ continu is op het interval (a, b) en als de twee limieten $\lim_{v \uparrow b} F(v)$ en $\lim_{u \downarrow a} F(u)$ bestaan en als minstens één van beide eindig is, dan is

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{v \downarrow a} \lim_{u \uparrow b} \int_u^v f(x)\,dx = \lim_{v \uparrow b} F(v) - \lim_{u \downarrow a} F(u).$$

Voorbeeld

Bereken de volgende oneigenlijke integraal als deze bestaat.

$$\int_0^7 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\int_0^7 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{u \downarrow 0} \int_u^7 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \\
&= \lim_{u \downarrow 0} \Big[2\sqrt{x}\Big]_u^7 \\
&= \lim_{u \downarrow 0} \left(2\sqrt{7} - 2\sqrt{u}\right) \\
&= 2\sqrt{7}
\end{aligned}$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \lim_{u \downarrow -1} \lim_{v \uparrow 1} \int_u^v \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= \lim_{u \downarrow -1} \lim_{v \uparrow 1} [\arcsin x]_u^v \\
&= \lim_{v \uparrow 1} \arcsin v - \lim_{u \downarrow -1} \arcsin u \\
&= \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi
\end{aligned}$$

Opgaven: Oneigenlijke integralen uitrekenen

Vraag 1

Bereken de volgende oneigenlijke integraal als deze bestaat.

$$\int_3^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

$\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x^2}\,dx =$ ....

Vraag 2

Bereken de volgende oneigenlijke integraal als deze bestaat.

$$\int_{-\infty}^0 x^3 e^{4x}\,dx$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^0 x^3 e^{4x}\,dx =$ ....

Vraag 3

Bereken de volgende oneigenlijke integraal als deze bestaat.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx =$ ....

Vraag 4

Bereken de volgende oneigenlijke integraal als deze bestaat.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$ ....

Vraag 5

Bereken de volgende oneigenlijke integraal als deze bestaat.

$$\frac{1}{9}\int_0^9 x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$\frac{1}{9}\int_0^9 x^{-\frac{1}{2}}\,dx =$ ....

Theorie: Gemiddelde functiewaarde

Het **gemiddelde** $\overline{f}_{[a,b]}$ van een functie $f(x)$ over het interval $[a,b]$ is

$$\overline{f}_{[a,b]} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

d.w.z. de integraal over het interval gedeeld door de lengte van het interval. De integraal is de oppervlakte onder de grafiek, en die is gelijk aan de oppervlakte van de rechthoek met hoogte $\overline{f}_{[a,b]}$. Onderstaande concrete voorbeelden illustreren deze toepassing.

Voorbeeld

De berekening van de gemiddelde waarde van $f(t) = e^{-t}$ op het interval $[0, 100]$.

$$\overline{f}_{[0,100]} = \frac{1}{100}\int_0^{100} e^{-t}\,dt = \frac{1}{100}\left[-e^{-t}\right]_0^{100} = \frac{1}{100}\left(1 - e^{-100}\right)$$

Merk op dat de gemiddelde waarde ongeveer gelijk is aan $\frac{1}{100}$ omdat de term e^{-100} verwaarloosbaar klein is.

Voorbeeld

De berekening van de gemiddelde waarde van $\sin(x)^2$ op het interval $[0, 2\pi]$.

Via partiële integratie vinden we:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \big(\sin(x)\big)^2\,dx &= \int_0^{2\pi} \sin(x)\cdot\big(-\cos(x)\big)'\,dx \\
&= \big[-\sin(x)\cos(x)\big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos(x)\cdot\big(-\cos(x)\big)\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} \big(\cos(x)^2\big)\,dx
\end{aligned}$$

Maar dan ook:

$$\begin{aligned}
2\int_0^{2\pi} \big(\sin(x)\big)^2\,dx &= \int_0^{2\pi} \big(\sin(x)\big)^2\,dx + \int_0^{2\pi} \big(\cos(x)^2\big)\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(\big(\sin(x)\big)^2 + \big(\cos(x)^2\big)\Big)\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} 1\,dx = \big[x\big]_0^{2\pi} = 2\pi.
\end{aligned}$$

Dus:

$$\int_0^{2\pi} \big(\sin(x)\big)^2\,dx = \pi$$

en de gemiddelde waarde van $\sin(x)^2$ op het interval $[0, 2\pi]$ is gelijk aan $\frac{1}{2}$.

Theorie: De oppervlakte van de eenheidscirkel

We bereken de oppervlakte A van een cirkelschijf met straal 1. De schijf wordt gegeven door $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$, dus $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ met $-1 \leq x \leq 1$. Hieruit volgt:

$$A = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$$

Substitueer $x = \cos(\theta)$ met $0 \leq \theta \leq \pi$. Deze substitutie heeft een meetkundige achtergrond: een vector $\big(x, y\big)$ op de eenheidscirkel wordt bepaald door de hoek θ met de x-as; er geldt $\big(x, y\big) = \big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big)$. Merk op dat $x = -1$ correspondeert met $\theta = \pi$ en $x = 1$ met $\theta = 0$.

We berekenen $dx = -\sin(\theta)d\theta$. Omdat $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ geldt $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ (we moeten de positieve wortel hebben, omdat $\sin\theta$ positief is voor $\theta \in (0,\pi)$). Dus:

$$
\begin{aligned}
A &= 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= 2\int_{\pi}^{0} -\sin^2\theta\,d\theta \\
&= \int_{\pi}^{0} \big(\cos(2\theta)-1\big)\,d\theta \\
&= \Big[\tfrac{1}{2}\sin(2\theta)-\theta\Big]_{\pi}^{0} \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

Theorie: Volumeberekening

Een integraal van een functie kan worden benaderd door niet met alle functiewaarden, maar met eindig veel functiewaarden te rekenen. Voor positieve functies levert dit de oppervlakte onder de grafiek van de functie. Op analoge manier kan een volume berekend worden.

Beschouw een lichaam L in de drie dimensionale ruimte. De doorsnijding van L met een vlak $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = \bar{x}\}$ is een gebied met een oppervlakte $A(\bar{x})$. Het volume $V(L)$ van L kan benaderd worden door eindig veel van deze doorsnijdingen
te bekijken. Neem aan dat L ligt in een gebied met x-waarden tussen a en b. Voor een groot getal n, laat $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ en kies n punten $x_i = a + i\Delta x$, $1 \le i \le n$. Dan:

$$V(L) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x$$

De laatste limiet (als hij bestaat) is gelijk aan de integraal van de functie $A(x)$ over het interval (a,b), dus:

$$V(L) = \int_a^b A(x)\,dx$$

Voorbeeld: Inhoud van een bol

Bereken de inhoud van een bol B met straal r. De bol wordt gegeven door $x^2+y^2+z^2 \le r^2$. Voor $-r \le \bar{x} \le r$ is de doorsnijding van B met het vlak $\{x = \bar{x}\}$ gelijk aan de schijf $\{y^2+z^2 \le r^2-\bar{x}^2\}$ met straal $\sqrt{r^2-\bar{x}^2}$. Deze schijf heeft oppervlakte $A(\bar{x}) = \pi(r^2-\bar{x}^2)$.

Het volume van B is dus

$$\begin{aligned} V(B) &= \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx \\ &= \left[\pi(r^2x - \frac{1}{3}x^3)\right]_{-r}^{r} \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

Voorbeeld: Inhoud van een pyramide

Bereken de inhoud van een pyramide met als grondvlak een vierkant van zijde a, en met hoogte h. Op een hoogte x tussen 0 en h, geeft de pyramide een vierkant van zijde $\frac{ax}{h}$. De oppervlakte hiervan is $A(x) = \left(\frac{ax}{h}\right)^2$, zodat de inhoud van de pyramide gegeven wordt door

$$\begin{aligned} V(P) &= \int_0^h \left(\frac{ax}{h}\right)^2 dx \\ &= \frac{a^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx \\ &= \frac{a^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h \\ &= \frac{a^2}{h^2}\frac{1}{3}h^3 \\ &= \frac{1}{3}a^2h \end{aligned}$$

oftewel de inhoud van de pyramide is een derde keer de oppervlakte van het grondvlak keer de hoogte.

Opgaven: Toepassen van integraalrekening

Vraag 1

Een plantencel neemt water op in de centrale vacuole. Neem aan dat de vacuole aanvankelijk een volume $V(0) = 9\,\mu\text{m}^3$ heeft.Veronderstel dat de opnamesnelheid gemodelleerd kan worden als

$$V'(t) = 25 \cdot e^{-2t},$$

waarbij de tijd t in uren is en volume in μm^3.

a) Bepaal de exacte formule voor het volume $V(t)$.

b) Wat wordt volgens dit model het volume op de lange duur?

$V(t) =$ .... μm^3

volume op de lange duur = ... μm^3

Theorie: Waarom numerieke integratie?

Je kunt je natuurlijk afvragen waar numerieke integratie eigenlijk goed voor is?

De twee belangrijkste redenen zijn:

1. Niet elke integreerbare functie heeft een primitieve die in termen van elementaire functies is uit te drukken. Anders gezegd, je kunt niet elke integraal exact uitrekenen.
2. Bij meetgegevens heb je geen formule voor de functie die de data beschrijft. Als je dan de oppervlakte onder de kromme nodig hebt, dan moet je wel een numerieke benadering hanteren.

Een voorbeeld van het eerste geval is de functie

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

De integraalfunctie

$$F(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi$$

is dan niet in termen van elementaire functies uit te drukken. Omdat deze functie wel vaak gebruikt wordt hebben wiskundigen deze gedoopt als de errror functie erf.

Het tweede geval komt natuurlijk vaak voor en de meest gangbare methode van aanpak is het gebruik van een kwadratuurformule.

Theorie: Gebruik van een kwadratuurformule

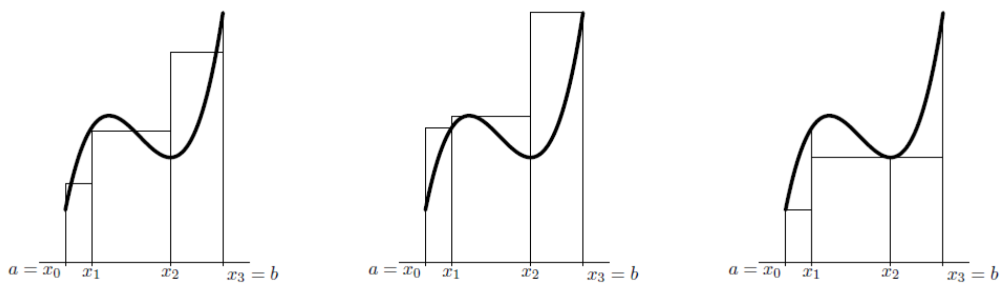
We gaan verscheidene kwadratuurformules bestuderen voor benadering van de integraal $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ van een functie $f(x)$ over een interval $[a, b]$. We verdelen hierbij steeds het interval $[a, b]$ in n stukjes door in dat interval vaste punten $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ aan te wijzen met

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Zo'n verzameling heet wel een **verdeling** V van $[a, b]$. Vervolgens kiezen we in elk van de deelintervallen $[x_{k-1}, x_k]$ een **strooipunt** s_k. Dus $x_{k-1} \leq s_k \leq x_k$ voor $k = 1, 2, \ldots n$. De lengte van elk van de deelintervallen $[x_{k-1}, x_k]$ geven we aan met $\triangle_k = x_k - x_{k-1}$ en het maximum van de lengtes van de deelintervallen noemen we de **maaswijdte**. De uitdrukking

$$R(V; s_1, \ldots, s_n) = \sum_{k=1}^{n} f(s_k) \cdot \triangle_k$$

heet een **Riemannsom** behorend bij de functie f. Merk op: bij een gegeven verdeling V van $[a, b]$ horen veel verschillende Riemannsommen: bij elke keuze van strooipunten krijg je er telkens een. Hieronder zijn bij een zekere verdeling V van $[a, b]$, waarbij dat interval in drie stukjes verdeeld wordt, drie Riemannsommen gegeven: links een 'willekeurige', daarnaast de grootst mogelijke Riemannsom die je bij V kunt maken (bovensom), en rechts de kleinst mogelijke (ondersom).



Zo'n Riemannsom is dus de som van de oppervlaktes van rechthoekjes. Deze rechthoekjes samen vormen een benadering van de figuur waarvan we de oppervlakte willen bepalen. De gevraagde oppervlakte is in zekere zin een limiet van zulke Riemannsommen. Een visualisatie van de Riemannsommen is hieronder geplaats om mee te spelen zodat je een beter beeld van de verschillende situaties (bovensom, ondersom. kunt krijgen.

Een Riemannsom is een speciaal geval van een **kwadratuurformule**, die geschreven kan worden als

$$K(V; s_1, \ldots, s_n) = \sum_{k=1}^{n} f(s_k) \cdot w_k$$

voor zekere gewichten $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Vaak zullen de strooipunten samenvallen met punten van de verdeling V en zal elk gewicht bestaan uit het product van $\triangle_k$ en een som van functiewaarden in strooipunten en punten van de verdeling V in de omgeving van strooipunt s_k. Als de strooipunten op gelijke onderlinge afstant, d.w.z. equidistant, gekozen zijn spreken we van een **Newton-Cotes kwadratuurformule**; als de strooipunten niet equidistant gekozen zijn dan spreken we van een **Gauss kwadratuurformule**. De laatstgenoemde categorie van kwadratuurformules bevat de beste integratiemethoden, maar deze zullen we niet bespreken.

Theorie: Linkerpunt-, rechterpunt- en middelpunt-Riemannsommen

We nemen de verdeling van het interval $[a, b]$ in n gelijke stukken:

$$x_k = a + kh$$

voor $k = 1, 2 \ldots n$ met

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Voor de selectie van de strooipunten onderscheiden we de volgende drie gevallen: Kies voor elk deelinterval $[x_{k-1}, x_k]$ steeds het

1. linkerpunt, $s_k = a + (k-1)h$ (linkerpunt-Riemannsom)
2. rechterpunt, $s_k = a + kh$ (rechterpunt-Riemannsom)
3. middelpunt, $s_k = a + (k - \frac{1}{2})h$ (middelpunt-Riemannsom)

De Riemannsommen kunnen nu als volgt opgeschreven worden:

1. linkerpunt-Riemannsom $= h \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\bigl(a + (k-1)h\bigr)$
2. rechterpunt-Riemannsom $= h \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\bigl(a + kh\bigr)$
3. middelpunt-Riemannsom $= h \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\bigl(a + (k - \tfrac{1}{2})h\bigr)$

Deze sommen worden gebruikt om de oppervlakte van het gebied onder f te benaderen. Een visualisatie van de Riemannsommen is hieronder geplaatst om mee te spelen zodat je een beter beeld van de verschillende situaties kunt krijgen.

Theorie: Afbreekfout in Riemannsommen

We bekijken de afbreekfout in de linkerpunt-Riemannsom (voor de rechterpunt-Riemannsom is de afleiding analoog en het resultaat hetzelfde) en de middelpunt-Riemannsom van een 'nette' functie $f(x)$ op het interval $[a, b]$. We veronderstellen n strooipunten die op afstand $h = \dfrac{b-a}{n}$ van elkaar liggen. We noteren de Riemannsom met de letter R. Uit de analyse zal blijken dat de middelpunt-Riemannsom een betere numerieke integratiemethode is dan de linkerpunt- of rechterpunt-Riemannsom.

Voorbeeld: Afbreekfout bij linkerpunt-Riemannsom

Stel dat M het maximum van $|f'|$ op $[a, b]$ is. Dan geldt voor de linkerpunt-Riemannsom R:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - R \right| \le \tfrac{1}{2} M (b-a) h$$

Met andere woorden: de afbreekfout is lineair in de maaswijdte h

Meer

De strooipunten zijn $s_k = a + (k-1)h$ voor $k = 1, \dots n$ en de linkerpunt-Riemannsom is gegeven door

$$R = \sum_{k=1}^{n} f(a + (k-1)h) \cdot h = \big(f(a) + f(a+h) + \cdots f(b-h)\big) \cdot h$$

We noteren $s_{n+1} = b$. We beschouwen eerst het deelinterval $[s_k, s_{k+1}]$ en merken op dat uit de stelling van Taylor volgt dat

$$f(x) = f(s_k) + f'(\xi_x)(x - s_k)$$

voor x en ξ_x in dit interval (ξ hangt van x af, maar dit doet er niet echt toe). Daarom geldt:

$$\left|\int_{s_k}^{s_{k+1}} \big(f(x) - f(s_k)\big)\,dx\right| \leq \ M \cdot \int_{s_k}^{s_{k+1}} (x - s_k)\,dx = M \cdot \tfrac{1}{2}h^2$$

zodat

$$\left|\int_{s_k}^{s_{k+1}} f(x)\,dx - f(s_k)h\right| \leq \ \tfrac{1}{2}Mh^2$$

Maar dan:

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\,dx - R\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{s_k}^{s_{k+1}} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(s_k)h\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{s_k}^{s_{k+1}} f(x)\,dx - f(s_k)h\right)\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{s_k}^{s_{k+1}} f(x)\,dx - f(s_k)h\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2}Mh^2 = \tfrac{1}{2}Mh^2 n = \tfrac{1}{2}M(b-a)h
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Afbreekfout bij rechterpunt-Riemannsom

Stel dat M het maximum van $|f'|$ op $[a,b]$ is. Dan geldt voor de rechterpunt-Riemannsom R:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - R\right| \leq \tfrac{1}{2}M(b-a)h$$

Met andere woorden: de afbreekfout is lineair in de maaswijdte h

Voorbeeld: Afbreekfout bij middelpunt-Riemannsom

Stel dat M het maximum van $|f''|$ op $[a,b]$ is. Dan geldt voor de middelpunt-Riemannsom R:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - R\right| \leq \tfrac{1}{24}M(b-a)h^2$$

Met andere woorden: de afbreekfout is kwadratisch in de maaswijdte h

Meer

De strooipunten zijn $s_k = a + (k - \frac{1}{2})h$ voor $k = 1, \ldots n$ en de middelpunt-Riemannsom is gegeven door

$$R = \sum_{k=1}^{n} f(a + (k - \tfrac{1}{2}h) \cdot h = \big(f(a + \tfrac{1}{2}h) + f(a + \tfrac{3}{2}h) + \cdots f(b - \tfrac{1}{2}\,h)\big) \cdot h$$

De punten van de verdeling zijn $x_k = a + k \cdot h$ voor $k = 0, 1, \ldots n$. We beschouwen eerst het subinterval $[x_{k-1}, x_k]$ voor $k = 1, \ldots n$ en merken op dat uit de stelling van Taylor volgt dat

$$f(x) = f(s_k) + f'(s_k)(x - s_k) + \tfrac{1}{2}f''(\xi_x)(x - s_{k-1})^2$$

voor x en ξ_x in dit subinterval (ξ_x hangt van x af, maar dit doet er niet echt toe). Dan geldt:

$$\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} \big(f(x) - f(s_k)\big)\,dx\right| = \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(s_k)(x - s_k)\,dx + \int_{x_{k-1}}^{x_k} \tfrac{1}{2}f''(\xi_x)(x - s_k)^2\,dx\right|$$

$$\leq \tfrac{1}{2}M \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 2 \cdot (\tfrac{1}{2}h)^3 = \tfrac{1}{24}Mh^3$$

Dit resultaat bereik je als je bedenkt dat de eerste integraal is gelijk aan 0 omdat s_k precies in het midden tussen x_{k-1} en x_k in ligt en dat de tweede integraal afgeschat kan worden. Dus:

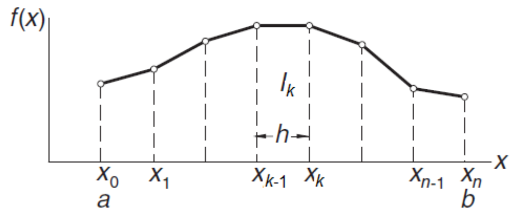
$$\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - f(s_k)h\right| \leq \tfrac{1}{24}Mh^3$$

Maar dan:

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\,dx - R\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(s_k)h\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - f(s_k)h\right)\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - f(s_k)h\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{24}\,M \cdot h^3 = \tfrac{1}{24}M \cdot h^3 n = \tfrac{1}{24}M(b-a)h^2
\end{aligned}$$

Theorie: De trapeziumregel

De trapeziumregel kan afgeleid worden door de functie $f(x)$ op het interval $[a, b]$ te benaderen met n lijnstukjes die opeenvolgende punten van de verdeling met elkaar verbinden, voor een verdeling van $n+1$ equidistante punten op het interval met maaswijdte $h = \dfrac{b-a}{n}$. Onderstaande figuur visualiseert dit.



We beginnen dus met het verdelen van het interval $[a, b]$ in n gelijke stukken met maaswijdte h. De punten van de verdeling zijn $x_k = a + kh$ met $k = 0, 1, \ldots n$. We bekijken het deelinterval $[x_{k-1}, x_k]$. We benaderen de integraal

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$$

met de oppervlakte I_k van het trapezium met hoekpunten $\big((x_{k-1}, 0)\big)$, $\big(x_{k-1}, f(x_{k-1})\big)$, $\big(x_k, f(x_k)\big)$ en $\big(x_k, 0\big)$. Deze is gemakkelijk meetkundig uit de rekenen:

$$I_k = \frac{h}{2}\big(f(x_{k-1}) + f(x_k)\big)$$

Sommeren we over alle deelintervallen dan krijgen we

$$\begin{aligned}
I = \sum_{k=1}^{n} I_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{h}{2}\big(f(x_{k-1}) + f(x_k)\big) \\
&= \frac{h}{2} f(x_0) + h\left(\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right) + \frac{h}{2} f(x_n) \\
&= \frac{h}{2} f(a) + h\left(\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)\right) + \frac{h}{2} f(b)
\end{aligned}$$

We hebben hiermee het volgende resultaat gevonden.

Voorbeeld: Trapeziumregel

Voor een 'nette' functie $f(x)$ op het interval $[a, b]$ geldt

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\Big(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)\Big)$$

met n een positief geheel getal en $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Deze sommen worden gebruikt om de oppervlakte van het gebied onder f te benaderen. Een visualisatie van de trapeziumregel is hieronder geplaatst om mee te spelen opdat je een beter beeld van de trapeziumregel kunt krijgen.

Theorie: Afbreekfout in de trapeziumregel

We bekijken de afbreekfout in de trapeziumregel toegepast op een 'nette' functie $f(x)$ op het interval $[a, b]$. Maar eerst vragen we aandacht voor de volgende hulpstelling die erg nuttig zal blijken te zijn:

Voorbeeld: Hulpstelling

Voor een tweemaal differentieerbare functie f op een interval $[a, b]$ met $f(a) = f(b) = 0$ geldt dat

$$\int_a^b (x-a)(b-x)f''(x)\,dx = -2\int f(x)\,dx$$

Meer

Het bewijs komt neer op tweemaal partieel integreren toepassen:

$$\begin{aligned}
\int_a^b (x-a)(b-x)f''(x)\,dx &= \big[(x-a)(b-x)f'(x)\big]_a^b - \int_a^b (a+b-2x)f'(x)\,dx \\
&= \int_a^b (2x-a-b)f'(x)\,dx \\
&= \big[(2x-a-b)f(x)\big]_a^b - \int_a^b 2f(x)\,dx \\
&= -2\int_a^b f(x)\,dx
\end{aligned}$$

We formuleren nu de afschatting van de afbreekfout in de trapeziumregel.

Voorbeeld: Afbreekfout bij de trapeziumregel

Stel dat M het maximum van $|f''|$ op $[a,b]$ is. Dan geldt voor de uitkomst T van de trapeziumregel:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T\right| \leq \tfrac{1}{12}M(b-a)h^2$$

Met andere woorden: de afbreekfout is kwadratisch in de maaswijdte h.

Meer

De punten van de verdeling zijn $x_k = a + kh$ voor $k = 0, 1, \ldots n$ met $h = \dfrac{b-a}{n}$ en de trapeziumregel is gegeven door

$$T = \frac{h}{2}\big(f(a) + f(b)\big) + h\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)$$

We beschouwen eerst het deelinterval $[x_{k-1}, x_k]$ voor $k = 1, \ldots n$ en schatten bijdrage aan de afbreekfout op elk deelinterval. We introduceren de functie

$$g(x) = f(x) - f(x_{k-1}) - \frac{\big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big)\big(x - x_{k-1}\big)}{h}$$

De functie g is de afwijking van f op het interval $[x_{k-1}, x_k]$ met de lineaire functie tussen de punten $\big(x_{k-1}, f(x_{k-1})\big)$ en $\big(x_k, f(x_k)\big)$. Dan is $\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)\,dx$ gelijk aan de bijdrage van dit deelinterval aan de afbreekfout van de trapeziumregel. Omdat de functie g tweemaal differentieerbaar is, en per definitie is $g(x_{k-1}) = g(x_k) = 0$ is de hulpstelling toepasbaar:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})(x_k - x)g''(x)\,dx$$

Per definitie geldt ook $g''(x) = f''(x)$ en dus:

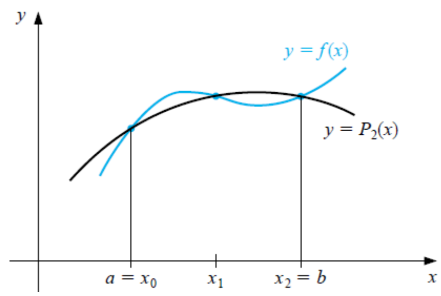
$$\begin{aligned}
\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)\,dx\right| &\leq \frac{1}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})(x_k - x)|f''(x)|\,dx \\
&\leq \frac{M}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})(x_k - x)\,dx \\
&= \frac{M}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k} (-x^2 + (x_{k-1} + x_k)x - x_{k-1}x_k)\,dx \\
&= \frac{M}{12}(x_k - x_{k-1})^3 \\
&= \frac{M}{12}h^3
\end{aligned}$$

Voor de afbreekfout van de trapeziumregel geldt dan

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{12}Mh^3 = \tfrac{1}{12}Mh^3 n = \tfrac{1}{12}M(b-a)h^2$$

Theorie: Simpson's regel

Simpson's regel kan afgeleid worden door de functie $f(x)$ op het interval $[a, b]$ te benaderen door drie opeenvolgende punten van de verdeling met elkaar verbinden d.m.v. een parabool, dan de volgende verzameling van drie punten in de verdeling net zo te behandelen, en doorgaan tot je het einde van het interval $[a, b]$ bereikt hebt, voor een verdeling van $n+1$ equidistante punten op het interval met maaswijdte $h = \dfrac{b-a}{n}$. We veronderstellen dus dat n even is, zeg $n = 2m$. Onderstaande figuur visualiseert de situatie voor $n = 2$.



De parabool $P_2(x)$ kunnen we via Lagrange-interpolatie vinden en de formule is

$$
\begin{aligned}
P_2(x) = \quad & \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) \\
& + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) \\
& + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_1)(x_2-x_2)} f(x_2)
\end{aligned}
$$

met $x_0 = a, x_1 = a+h, x_2 = a+2h$. Met andere woorden

$$
\begin{aligned}
P_2(x) = & \frac{(x-a-h)(x-a-2h)}{2h^2} f(x_0) \\
& - \frac{(x-a)(x-a-2h)}{h^2} f(x_1) \\
& + \frac{(x-a)(x-a-h)}{2h^2} f(x_2)
\end{aligned}
$$

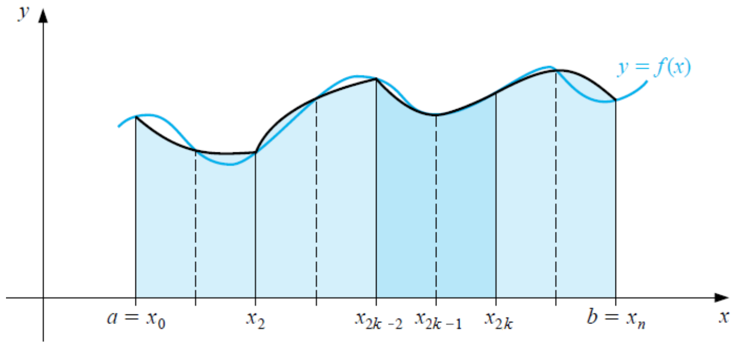
Dan geldt met de substitutieregel voor $y = \dfrac{x-a}{h}$ dat

$$
\begin{aligned}
\int_a^b P_2(x)\,dx &= f(x_0)\int_0^2 \frac{(y-1)(y-2)}{2}dy - f(x_1)\int_0^2 y(y-2)\,dy + f(x_2)\int_0^2 y(y-1)\,dy \\
&= \frac{h}{3}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\big)
\end{aligned}
$$

We kunnen nu een fijnere verdeling bekijken. De punten van de verdeling zijn $x_k = a + kh$ met $k = 0, 1, \ldots 2m$ kunnen we in groepjes van 3 onderverdelen: $\{x_{2k-2}, x_{2k-1}, x_{2k}\}$ voor $k = 1, \ldots m$. Op elk deelinterval $[x_{2k-2}, x_{2k-1}, x_{2k}]$ benaderen we de integraal

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\, dx$$

met de oppervlakte I_k onder de parabool door de punten $\big((x_{2k-2}, f(x_{2k-2})\big)$, $\big(x_{2k-1}, f(x_{2k-1})\big)$ en $\big(x_{2k}, f(x_{2k})\big)$. Zie onderstaande figuur om een indruk te hebben hoe dat gaat.



De benaderingsformule op elk deelinterval hebben we hierboven al afgeleid:

$$I_k = \frac{h}{3}\big(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\big)$$

Sommeren we over alle deelintervallen dan krijgen we

$$I = \sum_{k=1}^{m} I_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{h}{3}\big(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\big)$$

$$= \frac{h}{3}\big(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(a + 2kh) + 4\sum_{k=1}^{m} f(a + (2k-1)h)\big)$$

We hebben hiermee het volgende resultaat gevonden.

Voorbeeld: Simpson's regel

Voor een 'nette' functie $f(x)$ op het interval $[a, b]$ geldt

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{3}\big(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(a + 2kh) + 4\sum_{k=1}^{m} f(a + (2k-1)h)\big)$$

met n een even getal en $h = \dfrac{b-a}{n}$.

In het geval we punten halverwege een deelinterval toestaan, kunnen we Simpson's regel ook herschrijven, als

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{6}\Big(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) + 4\sum_{k=1}^{n} f\big(a + (k - \tfrac{1}{2})h\big)\Big)$$

Dan kun je beter zien dat

Simpson's formule $= \frac{1}{3} \cdot$ trapeziumregel $+ \frac{2}{3} \cdot$ middelpunt-Riemannsom

We weten al dat de afbreekfout van de middelpunt-Riemannsom en trapeziumregel kwadratisch in de maaswijdte h zijn; dus is Simpson's regel minstens kwadratisch in h, maar in werkelijkheid is Simpson's regel een nog veel betere benadering.

Python opdracht

Schrijf een functie `Simpsonregel(f,a,b,n)` die Simpson's regel implementeert.

Pas jouw functie toe met $n = 100$ in de volgende twee gevallen:

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{x^2+1}\,dx = \pi$
- $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x)\,dx = 2$

Theorie: Afbreekfout in Simpson's regel

Zonder bewijs geven we de afschatting van de afbreekfout in Simpson's regel van een 'nette' functie op het interval $[a, b]$ met een verdeling in een even aantal van n subintervallen.

Voorbeeld: Afbreekfout bij de Simpsons's regel

Stel dat M het maximum van $|f''''|$ op $[a, b]$ is. Dan geldt voor de uitkomst S van Simpson's regel bij een maaswijdte $h = \dfrac{b-a}{n}$:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - S \right| \leq \tfrac{1}{180} M(b-a)h^4$$

Met andere woorden: de afbreekfout is een vierde macht in de maaswijdte h.

Functies van meer variabelen

Theorie: Basisbegrippen

Tot nu toe hebben we ons beperkt tot functies van één veranderlijke, die simpelweg functioneren als machientjes die uit één getal een nieuw getal produceren volgens een gegeven formule. Maar je kunt natuurlijk ook machientjes en formules bedenken die uit twee getallen een nieuw getal produceren. We spreken dan van een functies van twee veranderlijken, ook wel **functies van twee variabelen** genoemd.

Voorbeeld: Eenvoudige voorbeelden

- Oppervlakte O van een driehoek met basis b en hoogte h: $O(b,h)=\frac{1}{2}\cdot b\cdot h$
- Afstand s afgelegd bij eenparige beweging met snelheid v en tijdsduur t: $s(v,t)=v\cdot t$

De terminologie van functies die we al kennen wordt ook bij functies van meer variabelen gebruikt. Het tweede voorbeeld is in functievorm opgeschreven, maar vaker kom je het tegen in de vorm van relaties tussen grootheden: $s=v\cdot t$. De snelheid v en tijdsduur t zijn dan de **onafhankelijke variabelen** en de afgelegde afstand s is de **afhankelijke variabele**, omdat de waarde hiervan afhangt van de waarden van de afhankelijke variabelen. Het **functievoorschrift** is de uitdrukking $v\cdot t$. De afhankelijke variabele zijn *expliciet* opgeschreven, geïsoleerd van de afhankelijk variabele. Veel relaties worden evenwel niet zo expliciet als functie gegeven. Een voorbeeld:

Voorbeeld

De lenzenformule voor een lens met een brandpuntsafstand f is

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f},$$

waarin v de voorwerpsafstand is en b de beeldafstand.

Dit heet een **impliciet verband** tussen grootheden. Soms is zo'n verband een functie, maar lang niet altijd: denk bijvoorbeeld aan de vergelijking $x^2+y^2+z^2=1$ voor de bol met centrum $(0,0,0)$ en straal 1, waarin z niet als functie van x en y kan geschreven worden).

Definitie

Een relatie tussen drie variabelen x, y en z, waarbij x en y als onafhankelijke variabelen optreden, is een **functie** $z=z(x,y)$ als bij elke toelaatbare waarden voor x en y *precies één* waarde voor z hoort. Elke toelaatbare waarden voor x en y noemt men een **origineel**; elke bijpassende waarde voor z heet dan de **functiewaarde** van dat origineel. Een functie verbindt dus op eenduidige wijze elk origineel met een functiewaarde. Alle originelen bij elkaar vormen het **domein** van de functie en alle functiewaarden die kunnen voorkomen vormen samen het **bereik** van de functie.

Opgaven: Functiewaarden uitrekenen

Vraag 1

Bereken de waarde van $f(-3,-2)$ voor de functie

$$f(a,b) = 3ab^3 + 2ab$$

$f(-3,-2) =$ ....

Vraag 2

Bereken de waarde van $f(-1,4)$ voor de functie

$$f(r,s) = (6(-3rs - r))rs - 6rs$$

$f(-1,4) =$ ....

Opgaven: Bereik en domein vaststellen

Vraag 1

Wat is het bereik van de functie $z(x,y) = \exp\left(-x^2 - y^2\right)$?

Schrijf je antwoord op in de vorm van een ongelijkheid of ongelijkheden in de variabele z

....

Vraag 2

Wat is het bereik van de functie $z(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$?

Schrijf je antwoord op in de vorm van een ongelijkheid of ongelijkheden in de variabele z

....

Vraag 3

Het domein van de functie $z(x,y) = \sqrt{4y - x^2 + 5}$ kan beschreven worden door de ongelijkheid $y \geq f(x)$. Welke functie $f(x)$ moet je dan nemen?

$f(x) =$ ....

Theorie: Isoleren van een variabele

Een impliciet verband tussen drie of meer variabelen herschrijven in een vorm waarbij één van de variabelen, zeg v, in zijn eentje aan de linkerkant van een vergelijking staat, d.w.z. een vergelijking van de vorm $v = \text{formule zonder } v$ creëren, heet het vrijmaken of **isoleren van de variabele** v. Je krijgt dan een functievoorschrift van een functie van meer variabelen. Onderstaand voorbeeld laat zien hoe dit in zijn werk kan gaan.

Voorbeeld

In de relatie $y = \dfrac{7x+8z}{-6x+7z}$ zie je meteen dat y een functie van x en z is.
Is z nu ook een functie van x en y en, zo ja, wat is het functievoorschrift dan?
Met andere woorden, kun je z uitdrukken in x en y in de vorm $z = \text{formule in } x \text{ en } y$.

Je kunt de oplossing ook bereiken door tussenstappen in de vorm van vergelijkingen in te toetsen:
je ziet dan steeds of je nog op de goede weg bent,
maar uiteindelijk moet je de vergelijking in de vorm $z = \ldots$ zien te krijgen.
Uitwerking: Je probeert de variabele z te isoleren in het gegeven verband $y = \dfrac{7x+8z}{-6x+7z}$.
Vermenigvuldig links en rechts met $-6x + 7z$ en vereenvoudig:

$$(-6x+7z)y = \frac{(7x+8z)(-6x+7z)}{(-6x+7z)}$$

$$-6xy + 7yz = 7x + 8z$$

Je hebt dan een vergelijking zonder noemers gekregen en je hoeft voorlopig alleen veeltermvergelijkingen te manipuleren.
Zet alle termen met z aan de linkerkant, breng alle termen zonder x naar de rechterkant en ontbind in factoren:

$$7yz - 8z = 6xy + 7x$$

$$z(7y-8) = x(6y+7)$$

Delen door $7y - 8$ geeft de gevraagde formulevorm:

$$z = \frac{x(6y+7)}{7y-8}$$

Dit kan gelezen worden als een functievoorschrift van z in x en y.

Opgaven: Omzetten verband in functievoorschrift

Vraag 1

In de relatie $y = \dfrac{7x+6z}{-6x+5z}$ zie je meteen dat y een functie van x en z is.
Is z nu ook een functie van x en y en, zo ja, wat is het functievoorschrift dan?
Met andere woorden, kun je z uitdrukken in x en y in de vorm $z =$ formule in x en y.

Je kunt de oplossing ook bereiken door tussenstappen in de vorm van vergelijkingen in te toetsen: je ziet dan steeds of je nog op de goede weg bent,
maar uiteindelijk moet je de vergelijking in de vorm $z = \ldots$ zien te krijgen.

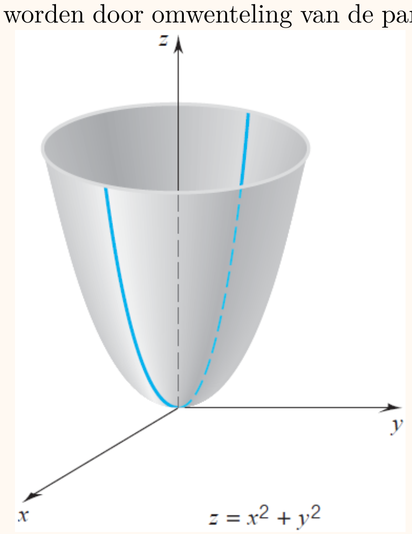
. . . .

Theorie: Grafieken en coördinaatlijnen

De grafiek van een functie f van één variabele is per definitie de verzameling punten (x, y) met $y = f(x)$. Op dezelfde manier kun je de **grafiek** van een functie f van twee variabelen definiëren als de verzameling punten (x, y, z) met $z = f(x, y)$. De tekening van de grafiek is een **oppervlak** in de 3-dimensionale ruimte.

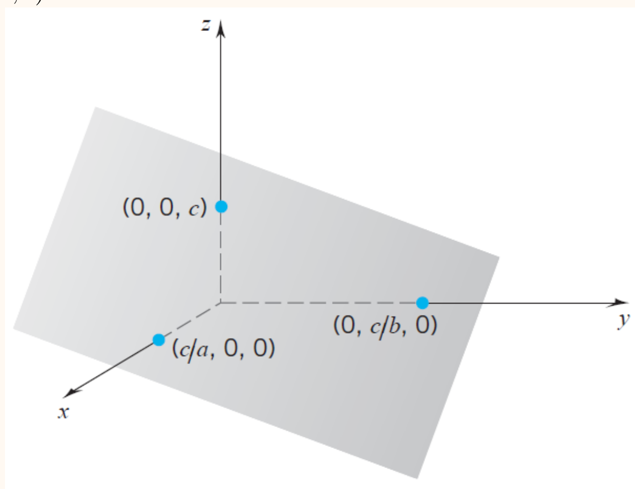
Voorbeeld: Voorbeeld 1

De functie $f(x, y) = x^2 + y^2$ heeft een domein waarin alle waarden van x en y toegestaan zijn. De grafiek is in onderstaande figuur (voor een stukje) getekend en is een paraboloïde die ook geconstrueerd kan worden door omwenteling van de parabool $z = x^2$ om de $z-as$.



Voorbeeld: Voorbeeld 2

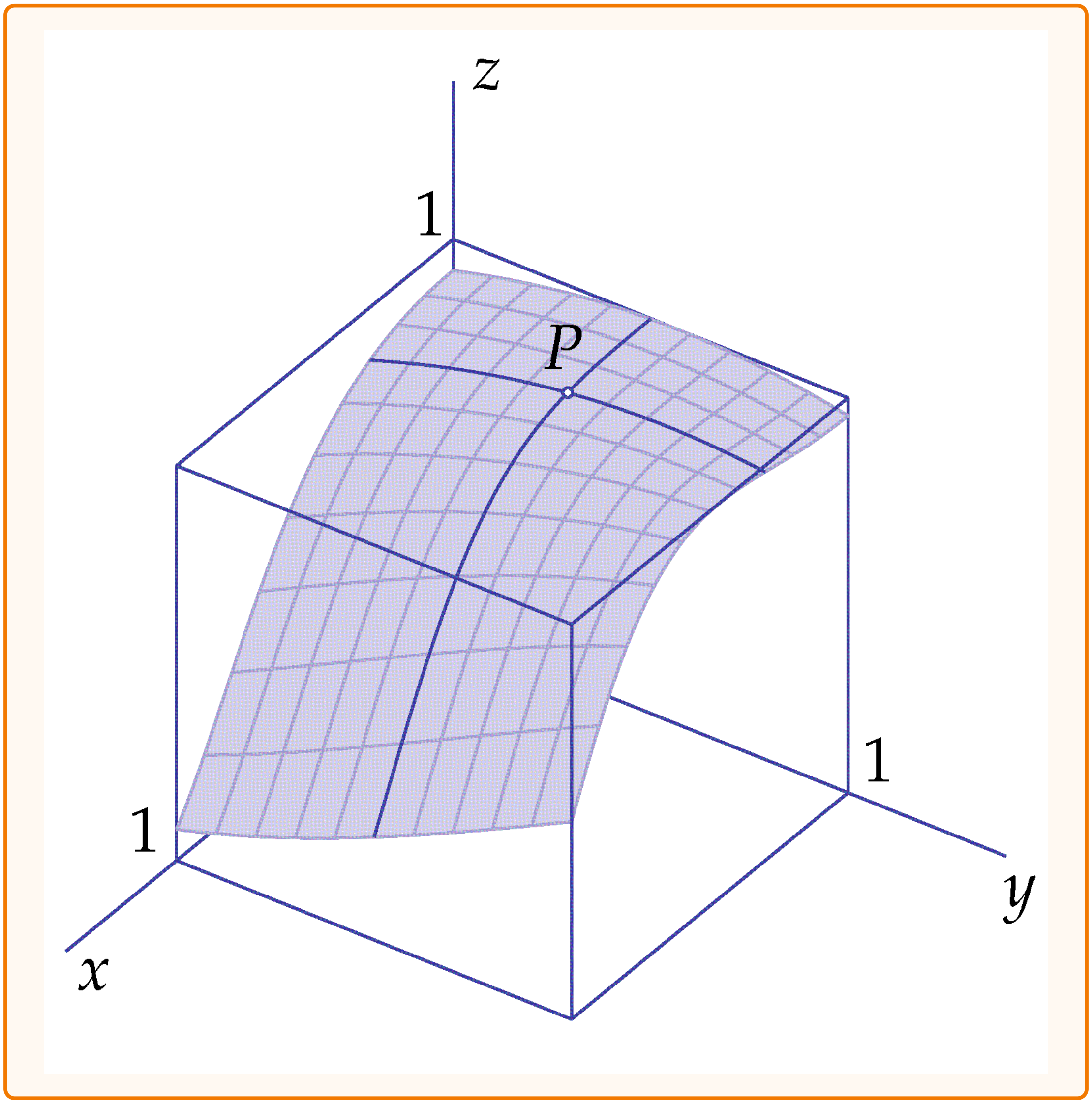
De grafiek van de functie $f(x, y) = c - ax - by$ is een vlak door de punten $(c/a, 0, 0)$, $(0, c/b, 0)$ en $(0, 0, c)$.



Bij een tekening van een grafiek van een functie van twee variabelen worden vaak i.p.v. coördinaatassen andere middelen ingezet om de ruimtelijke suggestie te vergroten. Bijvoorbeeld wordt om de figuur een kubus of balk heen getekend waarvan het xy-vlak gelijk is aan het rechthoekige deel van het domein waarvoor punten van het oppervlak getekend worden. Ook wordt in wiskundige software kleuring van het oppervlak gebruikt om diepte te suggereren. Vaak is tevens het **coördinatennet** aangegeven, gevormd door lijnen op het oppervlak, waar x, dan wel y constant is; dit worden **coördinaatlijnen** genoemd. In onderstaand voorbeeld zijn deze visualisatie trucs toegepast.

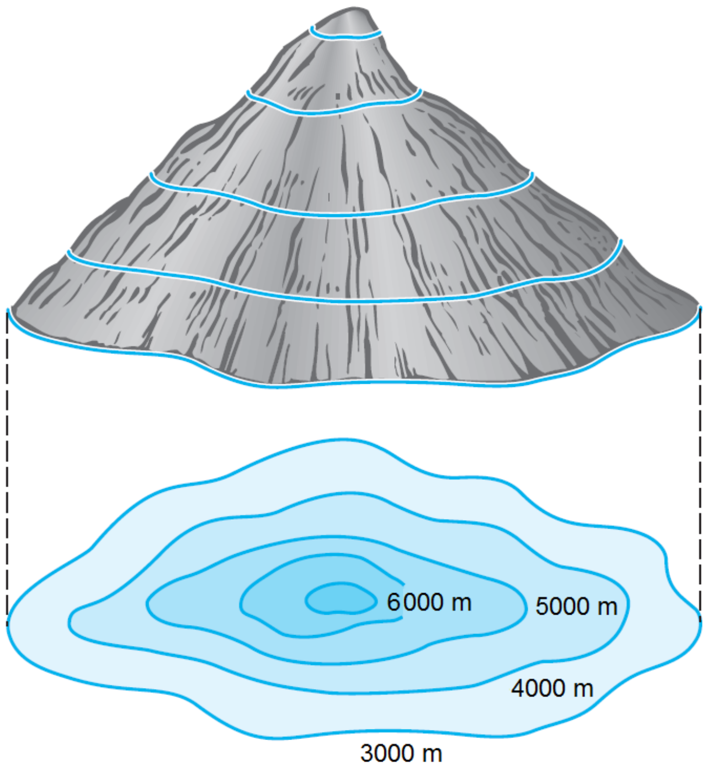
Voorbeeld: Voorbeeld 3

De grafiek van de functie $f(x, y) = \frac{1}{2}(1 - \sin(2x^2 - y - 1)$ is een gekromd oppervlak. In onderstaande tekening zijn de coördinaatlijnen door het punt $P = \big(0.3, 0.5, f(0.3, 0.5)\big)$ donkerder getekend. De ene lijn hoort dus bij alle punten op het oppervlak waarvoor geldt dat $x = 0.3$, de andere lijn hoort bij alle punten waarvoor geldt dat $y = 0.5$. Het gehele coördinatennet is getekend voor $x = 0.0, 0.1, \ldots, 0.9, 1.0$ en voor $y = 0.0, 0.1, \ldots, 0.9, 1.0$. Het coördinatennet en de kubus maken dus geen deel uit van de grafiek van f.

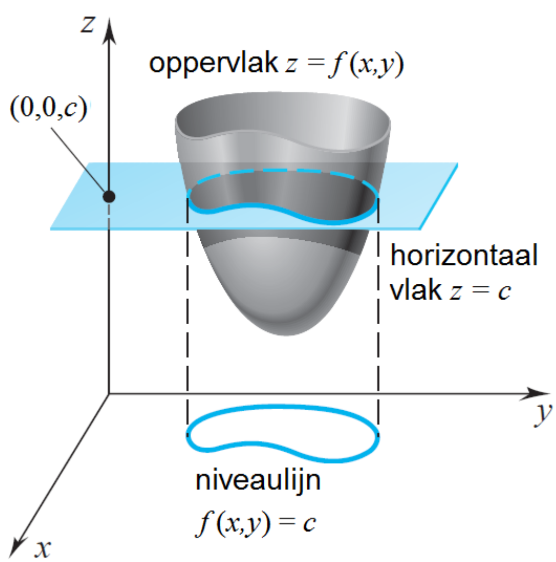


Theorie: Niveaulijnen en contourgrafieken

Om bij weerkaarten een indruk te geven van luchtdrukverschillen en om bij topografische kaarten een indruk te geven van hoogteverschillen worden vaak niveaulijnen gebruikt. Lijnen met gelijke luchtdruk heten isobaren. Hoogtelijnen zijn lijnen op een kaart die punten van gelijke hoogte met elkaar verbinden. Onderstaande figuur illustreert de constructie van een hoogtekaart



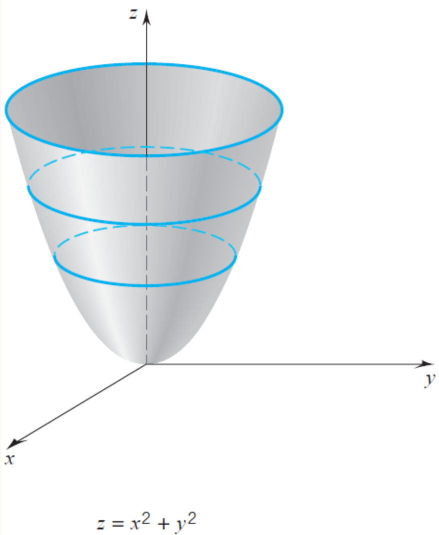
Maar deze constructie zou je ook op oppervlakken van een functie kunnen toepassen. We spreken dan van **isolijnen** of **niveaulijnen**. Ze zijn gedefinieerd als lijnen in de grafiek van een functie van twee variabelen met constante functiewaarden, met ander woorden, punten op het oppervlak waar de functie hetzelfde niveau heeft. Op zo'n lijn op het oppervlak is z dus constant. De projectie op het xy-vlak heet een **contourgrafiek** Hieronder zie je hoe een contourgrafiek van een functie ontstaat.

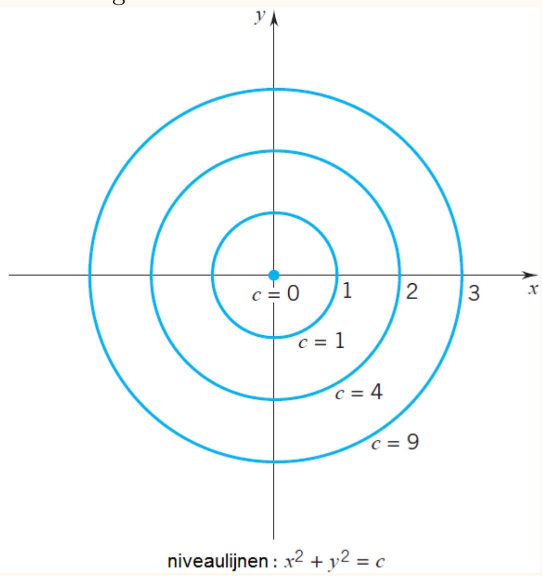


We geven een paar voorbeelden.

Voorbeeld: Voorbeeld 1

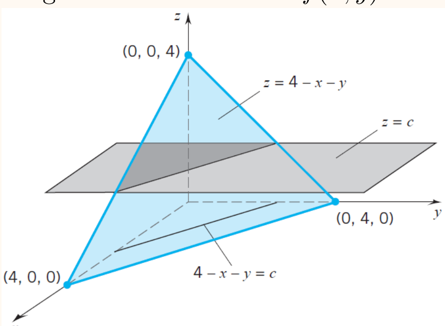
In de grafiek aan de linkerkant van de functie $f(x, y) = x^2 + y^2$ zijn niveaulijnen getekend en aan de rechterkant staat de bijpassende contourgrafiek.

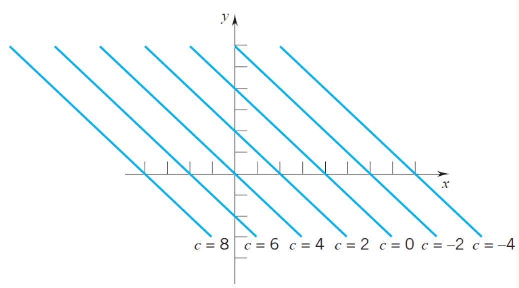




Voorbeeld: Voorbeeld 2

De grafiek van de functie $f(x, y) = 4 - 4x - 4y$ bestaat uit parallelle lijnen.

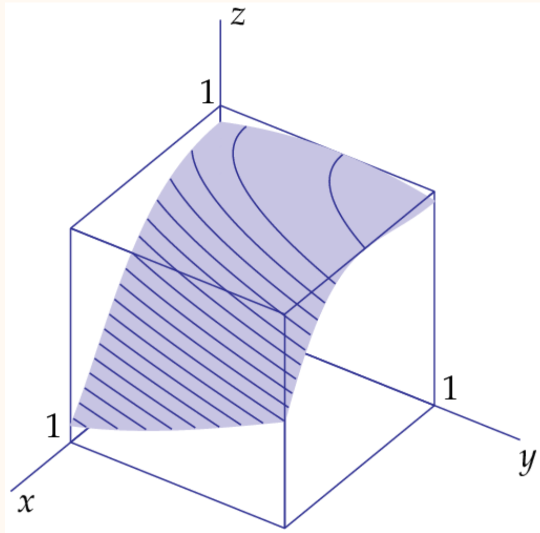




Visualisatie software staat vaak ook toe niveaulijnen op het oppervlak van een functie van twee variabelen te tonen.

Voorbeeld: Voorbeeld 3

In onderstaande grafiek van de functie $f(x, y) = \frac{1}{2}(1 - \sin(2x^2 - y - 1)$ zijn de niveaulijnen op het oppervlak getekend voor $z = 1.00, z = 0.95, z = 0.90, \ldots$.



Laten we de projectie van één van de niveaulijnen op het xy-vlak eens in detail bekijken, namelijk de niveaulijn met waarde 1. Dan moet gelden

$$\tfrac{1}{2}(1 - \sin(2x^2 - y - 1) = 1$$

. Dit geeft na omwerken de vergelijking

$$\sin(2x^2 - y - 1) = 1$$

Binnen het gekozen coördinatennet geldt dan

$$2x^2 - y - 1 = -\tfrac{1}{2}\pi$$

oftewel

$$y = 2x^2 + \tfrac{1}{2}\pi - 1$$

De niveaulijn is dus een parabool.

Theorie: Basisbegrippen en voorbeelden

Zij $\mathcal{U}$ een gebied in $\mathbb{R}^n$ en $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ een functie op $\mathcal{U}$. We schrijven $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Met $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wordt dit $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$. Voor $n = 2, 3$ gebruiken we ook de notatie $(x, y) \mapsto f(x, y)$ en $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$.

Er geldt $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(x) = L$ als voor ieder klein interval I rond de waarde L, er een omgeving van $\mathbf{a}$ is zodat $f(\mathbf{x})$ in I zit voor ieder punt $\mathbf{x}$ in deze omgeving. De waarde $f(\mathbf{x})$ is dus bijna L als $\mathbf{x}$ in de buurt van $\mathbf{a}$ is. De functie f heet continu in $\mathbf{a}$ als $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{z}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

Voorbeeld

Zij $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, gedefinieerd voor $(x, y) \neq (0, 0)$. Bestaat $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$?

In punten (x, mx) geldt

$$f(x, mx) = \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$

Deze waarde hangt niet van x af, maar varieert met m. Er zijn daarom punten (x, mx) willekeurig dicht bij $(0, 0)$, waarvoor de functiewaarden verschillend zijn. Conclusie: de limiet $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ bestaat niet.

Voorbeeld

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$

Immers:

$$\left|\frac{3x^2y}{x^2 + y^2}\right| \leq \left|\frac{3(x^2 + y^2)y}{x^2 + y^2}\right| \leq 3|y|$$

en de absolute waarde van $\dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2}$ is dus klein voor (x, y) in de buurt van $(0, 0)$.

Voorbeeld

Zij $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$, gedefinieerd voor $(x, y) \neq (0, 0)$. Bestaat $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$?

Als we de functiewaarde uitrekenen in punten (x, mx), krijgen we

$$f(x, mx) = \frac{m^2x^3}{x^2 + m^4x^4} = \frac{m^2x}{1 + m^4x^2}$$

Merk op dat

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x}{1 + m^4x^2} = 0,$$

onafhankelijk van m. Als we echter de functiewaarde uitrekenen in (x^2, mx), krijgen we

$$f(x^2, mx) = \frac{m^2x^4}{x^4 + m^4x^4} = \frac{m^2}{1 + m^4}.$$

Deze waarde hangt wel van m af, en is niet bijna 0 als m verschillend van 0 is. Er zijn daarom punten (x^2, mx) willekeurig dicht bij $(0, 0)$, waarvoor de functiewaarden verschillend zijn. De limiet $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ bestaat daarom niet.

Opgaven: Limieten vaststellen

Vraag 1

Zij

$$f(x, y) = \frac{3xy}{x^2 + y^2}$$

gedefinieerd voor $\big(x,y\big) \neq \big(0,0\big)$. Ga na of $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ bestaat.
Zo ja, bereken de limietwaarde; zo nee, geef 999 als antwoord.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy}{x^2+y^2} =$ .... (toets 999 in als de limiet niet bestaat)

Vraag 2

Zij

$$f(x,y) = \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2}$$

gedefinieerd voor $\big(x,y\big) \neq \big(0,0\big)$. Ga na of $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ bestaat.
Zo ja, bereken de limietwaarde; zo nee, geef 999 als antwoord.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2} =$ .... (toets 999 in als de limiet niet bestaat)

Theorie: Partiële afgeleiden van de eerste orde

Je kunt bij een functie $f(x,y)$ een van twee variabelen, zeg y, constant houden. Je krijgt dan een functie die alleen x als onafhankelijke variabele heeft. In de grafiek van f bevindt je je dan op een coördinaatlijn bij constante y-waarde. Als deze functie van x 'net' is, kun je de afgeleide hiervan bepalen: deze afgeleide heet de **partiële afgeleide van** $f(x,y)$ **naar** x en deze afgeleide heeft orde 1. Dit laatste is alleen van belang als we hogere partiële afgeleiden bespreken en laat je meestal weg in de beschrijving. De volgende drie notaties voor de partiële afgeleide worden vaak gebruikt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial}{\partial x}f(x,y) \quad \text{en} \quad f_x(x,y)$$

Volgens de definitie van de partiële afgeleide is

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \approx \frac{f(x+\triangle x,y)-f(x,y)}{\triangle x} \quad \text{voor kleine } \triangle x$$

Evenzo krijg je de partiële afgeleide naar y wanneer je juist x constant houdt en y als onafhankelijke variabele opvat. De gangbare notaties zijn dan

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y) \quad \text{en} \quad f_y(x,y)$$

Voorbeeld: Definitie en notatie

De partiële afgeleiden van de functie $f(x, y)$ zijn functies $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ gedefinieerd door

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x + dx, y) - f(x, y)}{dx}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{dy \to 0} \frac{f(x, y + dy) - f(x, y)}{dy}$$

Wanneer we de partiële afgeleide van de functie $f(x, y)$ in een bepaald punt (a, b) willen hebben, dan gebruiken we ook de volgende notatie

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} \text{ i.p.v. } \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \qquad \text{en} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} \text{ i.p.v. } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

Het handigst is in dit geval de notatie $f_x(a, b)$ en $f_y(a, b)$.

Voorbeeld: Rekenregels

De rekenregels voor afgeleiden van functies van één variabele, dat wil zeggen de constante factorregel en de som-, verschil, product- en quotiëntregel, zijn toepasbaar bij partiële afgeleiden.
Partiële afgeleide naar x:

$$\frac{\partial}{\partial x}(c \cdot f) = c \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{voor constante } c$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f \pm g) = \frac{\partial f}{\partial x} \pm \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot g - f \cdot \frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}$$

Partiële afgeleide naar y:

$$\frac{\partial}{\partial y}(c \cdot f) = c \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{voor constante } c$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f \pm g) = \frac{\partial f}{\partial y} \pm \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y} \cdot g - f \cdot \frac{\partial g}{\partial y}}{g^2}$$

Voorbeeld

Bereken de partiële afgeleide van $7x^4y^8$ naar y.
Uitwerking: We houden x constant en beschouwen y als onafhankelijke variabele. Dus $7x^4$ is constant.
Het resterende stukje van de formule dat van y afhangt is dan y^8.
De afgeleide (naar y) hiervan is $8 \cdot y^{8-1} = 8y^7$.
Het eindresultaat is het product van de twee tussenresultaten:

$$\frac{\partial}{\partial y}(7x^4y^8) = 7x^4 \cdot 8y^7 = 56x^4y^7$$

Voorbeeld

Bereken de partiële afgeleide van $x^2 y \sin x$ naar x.
Uitwerking: We kunnen de uitdrukking zien als een product van twee termen waarin alleen maar x en alleen maar y in voor komen, namelijk $x^2 y \sin x = x^2 \sin x \cdot y$.
De x-term is dus $x^2 \sin x$ en de afgeleide naar x hiervan is gelijk aan $2x\sin(x) + x^2\cos(x)$.
De y-term is simpelweg y en als functie van x constant.
We kunnen nu bijvoorbeeld de productregel van partiële afgeleiden toepassen en krijgen als eindantwoord

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 y \sin x) = \big(2x\sin(x) + x^2\cos(x)\big) \cdot y = 2x\sin(x)y + x^2\cos(x)y$$

De laatste stap van wegwerken van de haakjes is niet nodig en mischien is het antwoord in de vorm

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 y \sin x) = \big(2\sin(x) + x\cos(x)\big)\, xy$$

nog wel het mooist.

Voor functies van meer dan twee variabelen kunnen de op soortgelijke manier afgeleiden gedefinieerd worden. Bijvoorbeeld geldt voor de functie

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

dat
$$\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Opgaven: Bereken van partiële afgeleiden

Vraag 1

Bereken de partiële afgeleide van $4x^3y$ naar x.

$\frac{\partial}{\partial x}(4x^3y) =$ ....

Vraag 2

Bereken de partiële afgeleide van $4x^3y^2$ naar y.

$\frac{\partial}{\partial y}(4x^3y^2) =$ ....

Vraag 3

Bereken de partiële afgeleide van $2x^8 - xy^8$ naar y.

$\frac{\partial}{\partial y}(2x^8 - xy^8) =$ ....

Vraag 4

Bereken de partiële afgeleide van $x^6 y \sin x$ naar x.

$\frac{\partial}{\partial x}(x^6 y \sin x) =$ ....

Vraag 5

Bereken de partiële afgeleide van $\frac{\cos y}{x^3 y}$ naar y.

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\cos y}{x^3 y}\right) =$ ....

Vraag 6

Bereken de partiële afgeleide van $f(x,y) = x^2 + y^4$ naar y in het punt $(x,y) = (5,6)$.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(5,6)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

Theorie: Hogere partiële afgeleiden

Voorbeeld

We bekijken het voorbeeld van de volgende functie van twee variabelen

$$f(x,y) = \frac{x}{x+y}$$

De partiële afgeleiden zijn in dit geval met de quotiëntregel uit te rekenen en zijn (ga dat zelf na!)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x+y}\right) = \frac{y}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x+y}\right) = -\frac{x}{(x+y)^2}$$

De partiële afgeleiden zijn op zichzelf weer functies van de twee variabelen x en y, hiervan kun je opnieuw partiële afgeleiden bepalen. Die worden **partiële afgeleiden van de tweede orde** genoemd.

Zo zijn de partiële afgeleiden van $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ gelijk aan

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{(x+y)^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y(x+y)^{-2}\right)$$

$$= -2y(x+y)^{-3} = -2\frac{y}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x+y)^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y(x+y)^{-2}\right)$$

$$= (x+y)^{-2} - 2y(x+y)^{-3}$$

$$= \frac{1}{(x+y)^2} - \frac{2y}{(x+y)^3}$$

$$= \frac{x+y}{(x+y)^3} - \frac{2y}{(x+y)^3} = \frac{x-y}{(x+y)^3}$$

De partiële afgeleiden van $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ zijn gelijk aan (ga dat zelf na!)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right) = \frac{2x}{(x+y)^3}$$

Voorbeeld: Eigenschap van gemengde afgeleiden

Wat opvalt is dat de 'gemengde' afgeleiden $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right)$ en $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right)$ aan elkaar gelijk zijn. Dat is geen toeval: als de partiële afgeleiden van f bestaan en continu zijn is dat altijd zo. Met andere woorde, bij 'nette' functies van twee variabelen doet de volgorde waarin 'gemengde' hogere afgeleiden berekend worden er niet toe.

Voorbeeld: Notaties voor hogere afgeleiden

De volgende notaties voor afgeleiden van tweede orde worden gebruikt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= f_{xx}(x,y) \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= f_{xy}(x,y) \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right) &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= f_{yx}(x,y) \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= f_{yy}(x,y)
\end{aligned}$$

Soortgelijke notatie worden gebruikt voor hogere partiële afgeleiden en voor partiële afgeleiden van functies van meer dan twee variabelen.

Notitie: in de meeste tekstboeken wordt de notatie f_{yx} voor $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ gebruikt. Omdat voor functies met continue afgeledien geldt dat $f_{xy} = f_{yx}$ maakt het niet uit.

Voorbeeld

Bereken de partiële afgeleiden van de tweede orde van de functie

$$f(x,y) = 2x^6y^4 + 5xy + \frac{y}{8x}$$

Uitwerking: De oplossing bestaat uit de volgende vier partiële afgeleiden:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = 60\, x^4\, y^4 + \frac{y}{4\, x^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = 48\, x^5\, y^3 - \frac{1}{8\, x^2} + 5$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) = 48\, x^5\, y^3 - \frac{1}{8\, x^2} + 5$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = 24\, x^6\, y^2$$

Het is een kwestie van consequent en foutloos toepassen van de rekenregels voor differentiëren.

Opgaven: Hogere partiële afgeleiden

Vraag 1

Bereken de volgende partiële afgeleide van tweede orde:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} e^{x+y}$$

$\frac{\partial^2}{\partial y^2} e^{x+y} =$ ....

Vraag 2

Welk van onderstaande functies voldoet aan de volgende vergelijking:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

met constante $c \neq 0$?

a. $f(x, y) = y \sin(x + cy)$

b. $f(x, y) = \sin\left(x + cy\right) \cos\left(x + cy\right)$

c. $f(x, y) = \sin(x + cy) + \cos(x + cy)$

d. $f(x, y) = x \sin(x + cy)$

Vraag 3

Welke van onderstaande functies voldoet aan de vergelijking

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \ ?$$

a. $f(x, y) = 2x + 2y - 4z^2$
b. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$
c. $f(x, y) = 4x^2 + 4y^2 - 4z^2$
d. $f(x, y) = \ln(4x^2 + 4y^2)$

Vraag 4

Bereken de volgende partiële afgeleide van tweede orde:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin(xy)$$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin(xy) =$ ....

Vraag 5

Bereken de volgende partiële afgeleide van tweede orde:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln(x + 5y)$$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln(x + 5y) =$ ....

Vraag 6

Bekijk de functie

$$f(x, y, z) = x^6 y^2 \sin(z) - 4y$$

Welke volgorde van differentiëren leidt tot het snelste resultaat wanneer

$$\frac{\partial f}{\partial x^2 \partial y^3 \partial z^2}$$

gevraagd wordt?

a. De volgorde waarin je differentieert doet er helemaal niet toe.
b. Differentieer eerst driemaal naar y, en daarna nog naar x en z
c. Differentieer eerst tweemaal naar x, daarna tweemaal naar y en tweemaal naar z, en tenslotte nog eenmaal naar y.
d. Differentieer eerst tweemaal naar z, en daarna nog naar y en x

Vraag 7

Bereken de volgende partiële afgeleide van tweede orde:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\big(\exp(2y) + x\ln(5y)\big)$$

$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\big(\exp(2y) + x\ln(5y)\big) =$ ....

Vraag 8

Bereken de exacte waarde van de volgende partiële afgeleide van tweede orde

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\big(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\big)$$

in het punt $(x, y) = (5, 3)$.

$\left.\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\big(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\big)\right|_{(5,3)} =$ ....

Vraag 9

Bereken de exacte waarde van

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

voor

$$f(x, y) = \sin(2xy) + y\cos(x)$$

in

$$(x, y) = (0, 3).$$

$\left.\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)\right|_{(0,3)} =$ .... voor $f(x, y) = \sin(2xy) + y\cos(x)$.

Vraag 10

Van een nog onbekende functie $f(x, y)$ weten we het volgende:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = y$$

Welke van de volgende functies voldoet aan deze vier voorwaarden?

a. $f(x, y) = \frac{1}{6}y^3 - 2y - 2$

b. $f(x, y) = e^{x-y}$

c. $f(x, y) = \cos(xy)$

d. $f(x, y) = -2x - 3y + xyz + 4$

Theorie: Kettingregels

We blikken eerst terug op de kettingregel van functies van één variabele.

Voorbeeld: Kettingregel van een functie van één variabele

We beschouwen de functie

$$y(t) = (3t^2 - 1)^5$$

als samengesteld uit de functies

$$y = x^5 \quad \text{en} \quad x = 3t^2 - 1$$

Er geldt dan:

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 \quad \text{en} \quad \frac{dx}{dt} = 6t$$

In termen van differentialen hebben we

$$dy = 5x^4 dx \quad \text{en} \quad dx = 6tdt$$

Omdat

$$x = 3t^2 - 1 \quad \text{en} \quad dx = 6tdt$$

geldt dus

$$dy = 5(3t^2 - 1)^4 6tdt$$

We hebben dus

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

waarbij we de afgeleide $\frac{dy}{dx}$, die aanvankelijk een functie is van x, via $x = x(t)$ ook weer in de variabele t kunnen uitdrukken. Deze laatste regel geldt meer algemeen voor elke functie $y \circ x$, dat wil zeggen voor de samenstelling van de functies y en x.

We bespreken nu **kettingregels** waarbij functies van twee variabelen betrokken zijn.

Voorbeeld: Eerste versie van een kettingregel

Als $z = z(x, y)$ een differentieerbare functie van twee variabelen is, en x en y differentieerbare functies van t zijn, dan is z een functie van t en

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Je kunt dit ook lezen als

$$\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = Dz\big(x(t), y(t)\big) \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

Voorbeeld

Stel

$$z(x, y) = x \cdot y, \quad x = \cos t \quad \text{en} \quad y = \sin t$$

Dan is z als functie van t gelijk aan $\cos(t)\sin(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)$ en dus $z'(t) = \cos(2t)$. Maar dit resultaat volgt ook uit bovenstaande kettingregel:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= \sin(t) \cdot -\sin(t) + \cos(t) \cdot \cos(t) \\ &= \cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t) \end{aligned}$$

Voorbeeld

Laat $z(x, y) = x^2 + y^4$, waar x en y van t afhangen volgens $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$. Er is sprake van een samengestelde functie

$$z\big(x(t), y(t)\big) = x(t)^2 + y(t)^4 = \cos(t)^2 + \sin(t)^4$$

. De kettingregel voor functies van één variabele geeft:

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = 2x(t)x'(t) + 4y(t)^3 y'(t) = -2\cos(t)\sin(t) + 4\sin^3(t)\cos(t)$$

Maar dit resultaat volgt ook uit bovenstaande kettingregel voor functies van meer variabelen:

$$\frac{d}{dt} f\big(x(t), y(t)\big) = Df\big(x(t), y(t)\big) \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big) & \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

Meer algemeen geldt de volgende rekenregel:

Voorbeeld: Tweede versie van een kettingregel

Als $z = z(x, y)$ een differentieerbare functie van twee variabelen is, en x en y differentieerbare functies van twee variabelen s en t zijn, dan is z een functie van s en t en

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Voorbeeld

Stel

$$z(x, y) = x \cdot y, \quad x = s^2 + t^2 \quad \text{en} \quad y = s^2 - t^2$$

Dan is z als functie van s t gelijk aan $(s^2 + t^2)(s^2 - t^2) = s^4 - t^4$, en dus $\dfrac{\partial z}{\partial s} = 4s^3$ en $\dfrac{\partial z}{\partial s} = -4t^3$. Maar dit resultaat volgt ook uit bovenstaande kettingregel:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= (s^2 - t^2)2s + (s^2 + t^2)2s = 4s^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= (s^2 - t^2)2t + (s^2 + t^2) \cdot -2t = -4t^3$$

Een belangrijke toepassing van de tweede kettingregel is de omzetting van **Cartesische coördinaten** x, y in **poolcoördinaten** r, ϕ via de definities $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$.

Voorbeeld: Voorbeeld van poolcoördinaten

Bekijk de functie

$$z(x,y) = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

met

$$x = r\cos\phi \quad \text{en} \quad y = r\sin\phi$$

In de poolcoördinaten r, ϕ is de functie eenvoudiger:

$$z(r,\phi) = \frac{2(r\cos\phi)(r\sin\phi)}{(r\cos\phi)^2 + (r\sin\phi)^2} = \frac{2\sin\phi\cos\phi}{\cos^2\phi - \sin^2\phi} = \frac{\sin(2\phi)}{\cos(2\phi)} = \tan(2\phi)$$

Na dit herschrijven van de functie in poolcoördinaten kom je tot de conclusie dat

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial z}{\partial \phi} = \frac{2}{\cos^2(2\phi)}$$

Maar dit resultaat volgt ook uit bovenstaande kettingregel. Eerst maar even de benodigde partiële afgeleiden uitrekenen:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y\cdot(x^2-y^2) - 2xy\cdot 2x}{(x^2-y^2)^2} = \frac{-2y(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x\cdot(x^2-y^2) - 2xy\cdot -2y}{(x^2-y^2)^2} = \frac{2x(x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\phi \qquad \frac{\partial x}{\partial \phi} = -r\sin\phi$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\phi \qquad \frac{\partial y}{\partial \phi} = r\cos\phi$$

Nu kunnen we de kettingregel toepasen:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= \frac{-2y(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}\cdot\cos\phi + \frac{2x(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}\cdot\sin\phi$$

$$= \frac{\big(2x\sin(\phi) - 2y\cos(\phi)\big)\big(x^2+y^2\big)}{(x^2-y^2)^2} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \phi}$$

$$= \frac{-2y(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}\cdot -r\sin\phi + \frac{2x(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}\cdot r\cos\phi$$

$$= \frac{\big(2ry\sin(\phi) + 2rx\cos(\phi)\big)\big(x^2+y^2\big)}{(x^2-y^2)^2}$$

$$= \frac{\big(2r^2(\sin^2(\phi)+\cos^2(\phi)\big)r^2}{(x^2-y^2)^2} = \frac{2r^4}{(x^2-y^2)^2}$$

$$= \frac{2r^4}{\big(r^2\big(\cos^2\phi - \sin^2\phi\big)\big)^2} = \frac{2}{\cos^2(2\phi)}$$

Veel formulemanipulatie, maar het voorbeeld laat ook zien dat sommige functies in een ander coördinatenstelsel dan waarin ze gedefinieerd zijn eenvoudig zijn en dat berekeningen simpeler zijn.

Je kunt de kettingregel bij poolcoördinaten ook als volgt formuleren:

Voorbeeld: Kettingregel voor poolcoördinaten

Als $f(x,y) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ dan is

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial f}{\partial x}r\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}r\cos\varphi$$

Voor functies van meer dan twee variabelen kunnen de op soortgelijke manier kettingregels bepaald worden. Bijvoorbeeld geldt

Voorbeeld: Kettingregel voor functies van 3 variabelen

Als $w = w(x, y, z)$ een differentieerbare functie van drie variabelen is, en x, y, en z differentieerbare functies van t zijn, dan is w een functie van t en

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

Opgaven: Kettingregels

Vraag 1

Gebruik een kettingregel om de afgeleide $\frac{dz}{dt}$ uit te rekenen voor de functie

$$z(x, y) = x^3 y$$

met

$$x = t^4 \quad \text{en} \quad y = t^3$$

$\frac{dz}{dt} =$ ....

Vraag 2

Gebruik een kettingregel om de afgeleide $\frac{dz}{dt}$ uit te rekenen voor de functie

$$z(x, y) = 3x + 5y$$

met $x = \cos t$ en $y = \sin t$.

$\frac{dz}{dt} =$ ....

Vraag 3

Gebruik een kettingregel om de afgeleide $\frac{dz}{dt}$ uit te rekenen in $t = \frac{\pi}{2}$ voor de functie

$$z(x, y) = x^2 + y^2$$

met

$$x = \cos(2t) \quad \text{en} \quad y = \sin(2t)$$

$\frac{dz}{dt} =$ ....

Vraag 4

Gebruik een kettingregel om de partiële afgeleiden $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ en $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ uit te rekenen voor de functie

$$z = 2x^2 + 2y^2$$

met

$$x = s + 2t \quad \text{en} \quad y = s - 2t$$

$\dfrac{\partial z}{\partial s} =$ ....

$\dfrac{\partial z}{\partial t} =$ ....

Vraag 5

Gebruik een kettingregel om de afgeleide $\dfrac{dw}{dt}$ uit te rekenen voor de functie

$$w(x, y, z) = xy + 3z$$

met

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

$\dfrac{dw}{dt} =$ ....

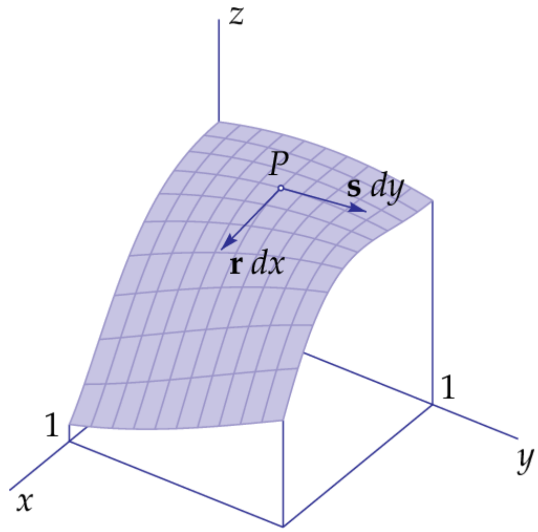
Theorie: Raakvectoren

In onderstaande figuur zijn **raakvectoren** aan de coördinaatlijnen door het punt $P = \big(a, b, c\big)$ met $c = f(a, b)$ getekend: ze hebben beide het punt P als aangrijpingspunt. De ene raakvector heeft een component in de x-richting die we dx noemen en een component in de y-richting die gelijk aan nul is. De component dz in de z-richting is dan gelijk aan $f_x(a, b)dx$ want langs de coördinaatlijn hebben we de functie $z = f(x, b)$ in één veranderlijke en hiervoor kunnen we de differentiaal opschrijven. De raakvector startend in het punt $P = (a, b)$ is dus

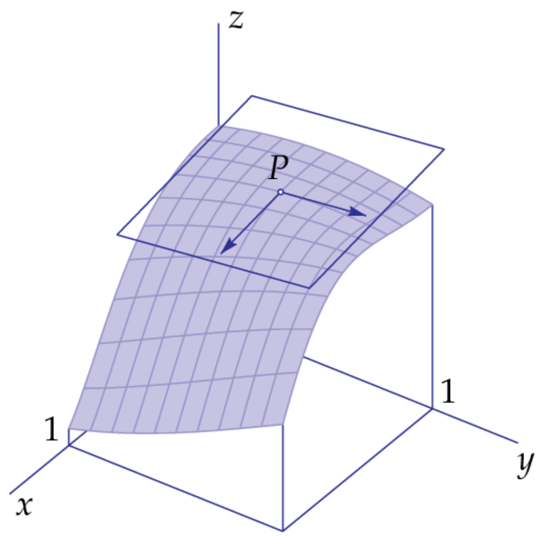
$$\begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ f_x(a, b)dx \end{pmatrix} = \mathbf{r}\, dx \quad \text{met} \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(a, b) \end{pmatrix}$$

De andere raakvector heeft een een component in de y-richting die we dy noemen en een component in de x-richting die gelijk aan nul is. De component dz in de z-richting is dan gelijk aan $f_y(a, b)dy$ want langs de coördinaatlijn hebben we de functie $z = f(a, y)$ in één veranderlijke en hiervoor kunnen we de differentiaal opschrijven. De raakvector startend in het punt $P = (a, b)$ is in dit geval dus

$$\begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ f_y(a,b)dy \end{pmatrix} = \mathbf{s}\, dy \quad \text{met} \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(a,b) \end{pmatrix}$$



In het getekende voorbeeld hebben we $dx = dy = 0.4$ genomen, maar je kunt net zo goed een dusdanige keuze maken dat de norm van de raakvectoren gelijk aan 1 is. De raakvectoren **r** en **s** spannen het **raakvlak** aan de grafiek van $f(x, y)$ in het punt P op. Elke vector met aangrijpingspunt P in het raakvlak is een lineaire combinatie $\lambda\mathbf{r} + \mu\mathbf{s}$ van **r** en **s** is een raakvector in P aan het oppervlak dat de grafiek van $f(x, y)$ vormt. Onderstaande figuur visualiseert dit.



Voor de vectorvoorstelling van het raakvlak in punt P mogen de vector met de oorsprong als aangrijpingspunt en eindpunt in P als steunvector nemen.

Voorbeeld: Vectorvoorstelling van een raakvlak

Stel $f(x,y)$ is een functie van twee variabelen x en y. Een vectorvoorstelling van het raakvlak in $P = \big(a, b, f(a,b)\big)$ is

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ f(a,b) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(a,b) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(a,b) \end{pmatrix}$$

Theorie: Vergelijking van een raakvlak

Voorbeeld: Intermezzo: de vergelijking van een vlak

We gaan de vergelijking van een raakvlak bepalen. Hiervoor is nodig dat je weet hoe een vergelijking van een vlak opgespoord kan worden als je twee basisvectoren van het vlak kent. In het algemeen heeft de vergelijking van een vlak de vorm

$$ax + by + cz + d = 0$$

met a, b, c getallen die niet allemaal 0 zijn en d een vierde getal. Merk op dat de getallen a, b, c en d niet uniek zijn: elk veelvoud van het viertal beschrijft hetzelfde vlak in de driedimensionale ruimte. We moeten dus eigenlijk spreken van een vergelijking van een vlak. Het vlak met vergelijking $ax + by + cz + d = 0$ is evenwijdig aan het vlak door de oorsprong gegeven door de vergelijking

$$ax + by + cz = 0$$

Deze vergelijking kun je ook schrijven als inproduct van twee vectoren, namelijk

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Met andere woorden, de vector beginnend in de oorsprong en eindigend op (x, y, z) wijst naar een punt op het vlak door de oorsprong als deze vector loodrecht staat op de vector met componenten a, b en c. Anders gezegd, de vector $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ staat loodrecht op elke vector in het vlak. Dit het een **normaalvector van het vlak**. Gegeven twee vectoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ die niet in elkaars verlengde liggen in een vlak door de oorsprong, kun je als normaalvector het uitproduct $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ (in deze volgorde!) nemen dat gedefinieerd is als

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_1 b_3 - a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Na bovenstaand intermezzo keren we terug ons onderwerp van functies van twee variabelen: stel

$z = f(x,y)$ is een functie van twee variabelen x en y. We bekijken een punt $P = (a,b,c)$ met $c = f(a,b)$. We weten dat de vectoren

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(a,b) \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(a,b) \end{pmatrix}$$

het raakvlak opspannen. Om de vergelijking van het raakvlak te vinden volstaat om een normaalvector van dit vlak te vinden. Dit kan via het uitproduct van $\mathbf{r}$ en $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{n} = \mathbf{r} \times \mathbf{s} = \begin{pmatrix} -f_x(a,b) \\ -f_y(a,b) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hiermee hebben we het volgende gevonden

Voorbeeld: Vergelijking van een raakvlak

Een vergelijking van het raakvlak in $P = (a,b,c)$ met $c = f(a,b)$ is

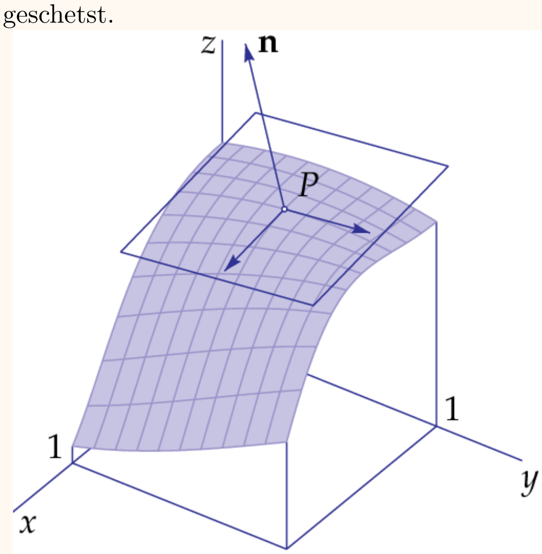
$$-f_x(a,b)(x-a) - f_y(a,b)(y-b) + (z-c) = 0$$

oftewel

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Voorbeeld

De grafiek van de functie $f(x,y) = \frac{1}{2}(1 - \sin(2x^2 - y - 1)$ is een gekromd oppervlak. In onderstaande tekening is coördinatennet is getekend voor $x = 0.0, 0.1, \ldots, 0.9, 1.0$ en voor $y = 0.0, 0.1, \ldots, 0.9, 1.0$, en zijn het raakvlak door het punt $P = \big(0.3, 0.5, f(0.3, 0.5)\big)$ en de normaalvector $\mathbf{n}$ geschetst.



Afgerond op vijf decimalen hebben we:

$$\begin{aligned} P &= (0.3, 0.5, 0.98436) \\ f_x(0.3, 0.5) &= -0.14891 \\ f_y(0.3, 0.5) &= 0.12409 \end{aligned}$$

De normaalvector $\mathbf{n}$ is dan

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0.14891 \\ -0.12409 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en een vergelijking van het raakvlak is

$$z = 0.96699 - 0.14891x + 0.12409y$$

Voorbeeld

Bereken een vergelijking van het raakvlak in $(0, -1, 0)$ aan de grafiek van de functie

$$f(x, y) = -xy^2 + x^2 + x$$

Uitwerking: We berekenen eerst de benodigde partiële afgeleiden van

$$f(x, y) = -xy^2 + x^2 + x$$

en hun waarden in $(0, -1)$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,-1)} = -y^2 + 2x + 1\Big|_{(0,-1)} = 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,-1)} = -2xy\Big|_{(0,-1)} = 0$$

Een vergelijking van het gevraagde raakvlak is

$$z = f(0, -1) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,-1)}(x - 0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,-1)}(y + 1)$$

oftewel, met alle invullingen

$$z = 0 + 0 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y + 1)$$

Met de haakjes weggewerkt vinden we dan

$$z = 0$$

Opgaven: Berekenen van een raakvlak

Vraag 1

Bereken een vergelijking van het raakvlak in $(2, -2, 4)$ aan de grafiek van de functie $f(x, y) = 2x^2 - y^2$

....

Vraag 2

Bereken een vergelijking van het raakvlak in $(1, 0, -1)$ aan de grafiek van de functie

$$f(x, y) = x^2y + xy - x^2$$

....

Vraag 3

Bereken een vergelijking van het raakvlak in $(1, 0, 0)$ aan de grafiek van de functie $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

....

Vraag 4

Bereken een vergelijking van het raakvlak in $(-1, -2, 1)$ aan de grafiek van de functie

$$f(x, y) = -xy^2 - xy - 1$$

....

Theorie: Meer variabelen en afbeeldingen

Bij functies van drie of meer variaabelen gaat alles net zo als bij functies van twee of drie variabelen, behalve dat je er dan geen meetkundige voorstelling meer bij kan maken. We lichten de generalisatie toe.

Beschouw een functie $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$ met $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Dan bestaan partiële afgeleiden $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ naar de verschillende coördinaten. Als deze partiële afgeleiden continu van het punt $(x_1, \dots, x_n)$ afhangen, dan bestaat de **afgeleide**:

$$Df(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \qquad \cdots \qquad \frac{\partial}{\partial x} \right.$$

Men kan ook meerdere differentieerbare functies $f_1, \dots, f_m$, allemaal gedefinieerd op $\mathbb{R}^n$, tegelijk bekijken. Dat levert een afbeelding $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x})$:

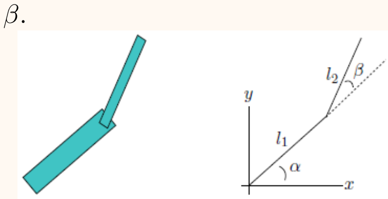
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Elk van de afbeeldingen is te differentiëren, zodat

$$Df(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Voorbeeld

In onderstaande figur is een robotarm bestaande uit een bovenarm van lengte l_1 en een onderarm van lengte l_2 getekend. De positie van het uiteinde, de hand, wordt vastgelegd door de twee hoeken α en β.



De positie (x, y) van de hand wordt gegeven door

$$(x, y) = (l_1 \cos(\alpha) + l_2 \cos(\alpha + \beta), l_1 \sin(\alpha) + l_2 \sin(\alpha + \beta))$$

Schrijf $\mathbf{f}(\alpha, \beta)$ voor de afbeelding gegeven door de rechterkant van bovenstaande gelijkheid. Dan geldt:

$$D\mathbf{f}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} -l_1 \sin(\alpha) - l_2 \sin(\alpha + \beta) & -l_2 \sin(\alpha + \beta) \\ l_1 \cos(\alpha) + l_2 \cos(\alpha + \beta) & l_2 \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$$

Deze matrix van partële afgeleiden geeft aan hoe, in eerste orde benadering, de positie van de hand verandert als functie van de hoeken α en β.

Theorie: Kettingregel voor samenstellingen

Voorbeeld

Beschouw de functies $g(x,y) = x^2 + y^2$ en $f(x) = \sin x$. Stel de functies samen tot $(x,y) \mapsto f\big(g(x,y)\big) = \sin(x^2+y^2)$. Differentēren naar x en y geeft

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f\big(g(x,y)\big)\right) = f'\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \cos(x^2+y^2)2x,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f\big(g(x,y)\big)\right) = f'\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \cos(x^2+y^2)2y.$$

Dus, met $h(x,y) = f\big(g(x,y)\big)$, geldt:

$$\begin{aligned} Dh(x,y) &= f'\big(g(x,y)\big)Dg(x,y) \\ &= f'\big(g(x,y)\big)\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \cos(x^2+y^2)\begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bovenstaand voorbeeld en eerdere voorbeelden laten zich generaliseren tot een kettingregel voor samenstellingen van afbeeldingen. We presenteren een aantal gevolgen van de algemene vorm van de kettingregel, die beneden wordt gegeven. In de volgende formules zijn f, g, g_1, g_2 functies van één variabele x of twee variabelen (x,y). Telkens als een functie van meer variabelen afhangt, wordt een afgeleide naar een variabele een partiëele afgeleide, waar de andere variabele constant gehouden wordt.

Regel

Voor $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ geldt:

$$\frac{d}{dx}\left(f\big(g_1(x), g_2(x)\big)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(g_1(x), g_2(x)\big)g_1'(x) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(g_1(x), g_2(x)\big)g_2'(x)$$

Regel

Voor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ geldt:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f\big(g(x,y)\big)\right) = f'\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f\big(g(x,y)\big)\right) = f'\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g}{\partial y}(x,y).$$

Regel

Voor $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ geldt:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f\big(g_1(x,y), g_2(x,y)\big)\right) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\big(g_1(x,y), g_2(x,y)\big)\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(g_1(x,y), g_2(x,y)\big)\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f\big(g_1(x,y), g_2(x,y)\big)\right) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\big(g_1(x,y), g_2(x,y)\big)\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(g_1(x,y), g_2(x,y)\big)\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y)$$

In het algemeen, laat $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en $\mathbf{g} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ twee afbeeldingen zijn. Uitvoeriger opgeschreven zijn twee afbeeldingen gegeven:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} g_1(y_1, \ldots, y_p) \\ \vdots \\ g_n(y_1, \ldots, y_p) \end{pmatrix}$$

Laat $\mathbf{F} : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^m$ de samenstelling $\mathbf{y} \mapsto f(g(\mathbf{y}))$ (waar $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_p)$) zijn. In deze notatie krijgt de kettingregel een natuurlijke vorm;

$$D\mathbf{F}(\mathbf{y}) = D\mathbf{f}\big(\mathbf{g}(\mathbf{y})\big)D\mathbf{g}(\mathbf{y})$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\mathbf{y}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_p}(\mathbf{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1}(\mathbf{y}) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial y_p}(\mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

Voorbeeld

Drie parallel geplaatste weerstanden met gemeten waarden $R_1 = 25\Omega, R_2 = 40\Omega$ en $R_3 = 50\Omega$, geven een totale weerstand R gegeven door

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

De totale weerstand R is dus een functie $R = R(R_1, R_2, R_3)$. We hebben

$$R(25, 40, 50) = \frac{1}{\frac{1}{25} + \frac{1}{40} + \frac{1}{50}} = \frac{200}{17}$$

Gegeven is dat de fout in de metingen van de weerstanden R_1, R_2, R_3 maximaal 0.5 procent bedraagt. De waarde van R_1 kan dus $\frac{0.5}{100}25 = 0.125$ afwijken van de opgegeven waarde 25. Evenzo kan de waarde van R_2 0.2 afwijken en de waarde van R_3 kan 0.25 afwijken. De vraag is wat de maximale fout in de berekende waarde van R is.

We schatten de fout in de berekende waarde van R door de linearizering van R te gebruiken. De kettingregel geeft

$$DR(R_1, R_2, R_3) = -(R(R_1, R_2, R_3))^2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{R_1^2} & \frac{-1}{R_2^2} & \frac{-1}{R_3^2} \end{pmatrix}$$

zodat

$$DR(25, 40, 50) = -\frac{200^2}{17^2} \begin{pmatrix} \frac{-1}{25^2} & \frac{-1}{40^2} & \frac{-1}{50^2} \end{pmatrix}$$

Als de afwijking in R_1, R_2, R_3 respectievelijk $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ bedraagt, is de fout in de berekende waarde van R ongeveer (in Ohm):

$$\left| DR(25, 40, 50) \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{pmatrix} \right|$$

Met $\Delta_1 = \frac{0.5}{100}25$, $\Delta_2 = \frac{0.5}{100}40$, en $\Delta_3 = \frac{0.5}{100}50$,
is de berekende fout in R dus ongeveer (in Ohm):

$$\frac{200^2}{17^2} \left(\frac{1}{25^2} \frac{5}{100} 25 + \frac{1}{40^2} \frac{5}{100} 40 + \frac{1}{50^2} \frac{5}{100} 50 \right) = \frac{1}{17}$$

We hebben de fout boven afgeschat met de linearizering van

$$R(R_1, R_2, R_3) \approx R(25, 40, 50) + DR(25, 40, 50) \begin{pmatrix} R_1 - 25 \\ R_2 - 40 \\ R_3 - 50 \end{pmatrix}$$

Overigens, daar de rechterkant boven lineair is en de fout in de meting van de afzonderlijke weerstanden voor alle weerstanden 0.5 procent is, kunnen we inzien dat de fout in R ook maximaal (ongeveer) 0.5 procent is, als de fout in R_1, R_2, R_3 maximaal 0.5 procent is. Nu is 0.5 procent van $R(25, 40, 50) = \frac{200}{17}$ gelijk aan $\frac{1}{17}$. We hoeven dus nauwelijks te rekenen voor het antwoord.

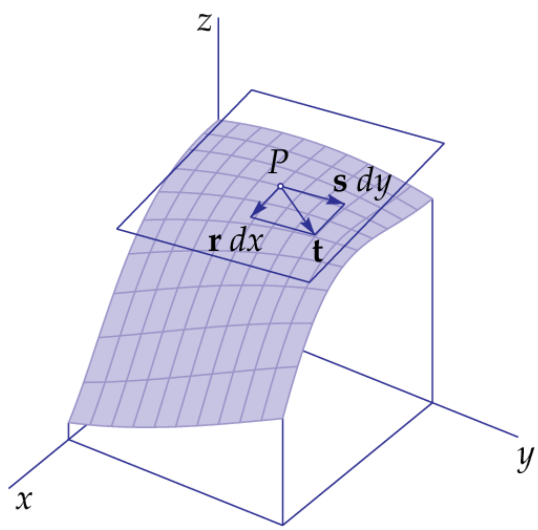
Theorie: De totale differentiaal

Stel $z = f(x, y)$ is een 'nette' functie van twee variabelen x en y. We bekijken een punt $P = (a, b, c)$ met $c = f(a, b)$. We weten dat de vectoren

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(a,b) \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(a,b) \end{pmatrix}$$

het raakvlak opspannen. Een willekeurige raakvector $\mathbf{t}$ aan de grafiek van $f(x, y)$ in P is van de vorm

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{r}dx + \mathbf{s}dy \\ &= \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ f_x(a,b)dx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ f_y(a,b)dy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ f_x(a,b)dx + f_y(a,b)dy \end{pmatrix} \end{aligned}$$



De eerste component, dx, is de toename van de x-coördinaat langs $\mathbf{t}$, de tweede component, dy, is de toename van de y-coördinaat langs $\mathbf{t}$ en de derde component is de toename van de z-coördinaat langs $\mathbf{t}$. Voor *kleine* dx en dy valt het raakvlak in P vrijwel samen met de grafiek van $f(x, y)$, en de toename van z valt dus vrijwel samen met de toename van $f(x, y)$. Die toename van $f(x, y)$ is gelijk aan

$$\triangle f = f(a + dx, b + dy) - f(a, b)$$

en voor kleine dx en dy vrijwel gelijk aan

$$f_x(a,b)dx + f_y(a,b)dy$$

De laatste uitdrukking heet de totale differentiaal van $f(x, y)$ in het punt $P = (a, b)$. De notatie voor de totale differentiaal is $d\big(f(a, b)\big)$, maar net als bij functies van één veranderlijke laten we in de notatie de afhankelijkheid van de differentiaal van het gekozen punt P achterwege en schrijven we het volgende:

Voorbeeld: Definitie

De totale differentiaal van de functie $f(x,y)$ van twee variabelen x en y noteren we met df en is door de volgende formule gedefinieerd:

$$df = f_x\,dx + f_y\,dy \qquad \text{oftewel} \qquad df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

In bovenstaande tekening is, net als eerder, de functie $f(x,y) = \frac{1}{2}\big(1 - \sin(2x^2 - y - 1)\big)$ en het punt $P = (0.3, 0.5)$ genomen. Voor de duidelijkheid van het plaatje zijn de toenames $dx = 0.2, dy = 0.3$ niet al te klein gekozen en is de afwijking tussen raakvlak en grafiek niet zo heel klein: het verschil tussen de totale differentiaal df in P en het functiewaardenverschil $\triangle f$ is hierbij ongeveer 0.01. Maar kies je dx en dy tien keer zo klein ($dx = 0.02$ en $dy = 0.03$), dan is de totale differentiaal df in P gelijk aan

$$df = f_x(0.3, 0.5)\,dx + f_y(0.3, 0.5)\,dy \approx -0.14891 \times 0.02 + -0.12409 \times 0.03 \approx 0.00074$$

terwijl het functiewaardenverschil $\triangle f$ in dit geval gelijk is aan

$$\triangle f = f(0.32, 0.53) - f(0.3, 0.5) \approx 0.00064$$

Het verschil tussen df en $\triangle f$ is nog maar 0.0001. Maak je dx en dy nog eens tien keer zo klein, dan blijkt het verschil ongeveer 0.000001 te zijn!

Voorbeeld

We bekijken de functie $z = z(x,y) = \dfrac{x}{y}$. Dan is de totale differentiaal dz gegeven door

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \\ &= \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy \end{aligned}$$

Voor functies van drie of meer variabelen wordt op soortgelijke manier de totale differentiaal gedefinieerd; bijvoorbeeld

Voorbeeld: Definitie

De totale differentiaal van de functie $f(x,y,z)$ van drie variabelen x, y en z noteren we met df en is door de volgende formule gedefinieerd:

$$df = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz \qquad \text{oftewel} \qquad df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Theorie: Taylorbenaderingen

Bij een 'nette' functie $f(x)$ van één veranderlijke hebben we al gezien dat we deze rondom een punt $x = a$ kunnen benaderen met de raaklijn in dit punt gegeven door de vergelijking

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Voor functies van twee variabelen kunnen we net zo'n **lineaire benadering** (ook wel **eerste orde benadering** genoemd) rondom een punt toepassen; in dit geval gebruiken we het raakvlak in het gekozen punt aan de grafiek van de gegeven functie.

Voorbeeld: Lineaire benadering

Bij een 'nette' functie $f(x, y)$ van twee variabelen x en y kunnen we functiewaarden rondom het punt $(x, y) = (a, b)$ benaderen via het raakvlak in dit punt gegeven door de vergelijking

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

Bij functies $f(x)$ van één veranderlijke hebben we al gezien dat de lineaire benadering hetzelfde was als de Taylorveelterm van graad 1 en dat we preciezere benaderingen krijgen als we een Taylorveelterm van hogere graad nemen, bijvoorbeeld de volgende **kwadratische benadering** (**tweede orde benadering**):

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \tfrac{1}{2} f''(a)(x - a)^2$$

Voor functies van twee variabelen kunnen we net zo'n benadering van tweede orde nemen:

Voorbeeld: Kwadratische benadering

Bij een 'nette' functie $f(x, y)$ van twee variabelen x en y kunnen we functiewaarden rondom het punt $(x, y) = (a, b)$ benaderen via

$$\begin{aligned} f(x, y) \approx\ & f(a, b) + f_x(a, b)\triangle x + f_y(a, b)\triangle y \\ & + \frac{1}{2}\big(f_{xx}(a, b)\triangle x^2 + 2 f_{xy}(a, b)\triangle x \triangle y + f_{yy}(a, b)\triangle y^2\big) \end{aligned}$$

met

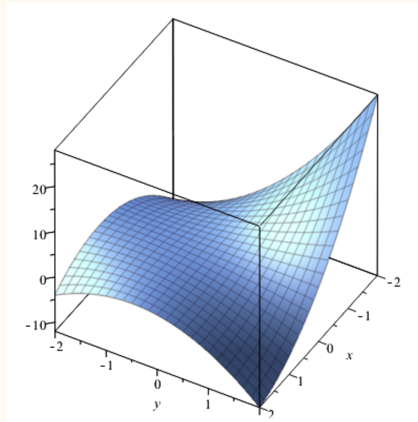
$$\triangle x = x - a \quad \text{en} \quad \triangle y = y - b.$$

Voorbeeld

We berekenen de kwadratische benadering rondom het punt $(1, 1)$ van de functie

$$f(x, y) = x^2 y - x y^2 - 3xy.$$

De grafiek van de functie is



De benodigde partiële afgeleiden zijn

$$f_x(x,y) = 2xy - y^2 - 3y, \quad f_y(x,y) = x^2 - 2xy - 3x,$$

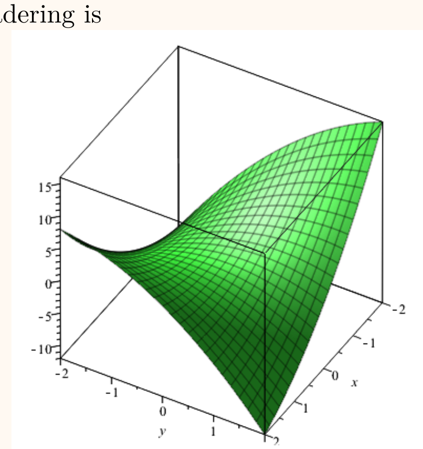
$$f_{xx}(x,y) = 2y, \quad f_{xy}(x,y) = 2x - 2y - 3 \quad \text{en} \quad f_{yy}(x,y) = -2x.$$

Invullen van de coördinaten van het punt $(1,1)$ in de partiële afgeleiden en in de algemene formule voor de kwadratische benadering geeft

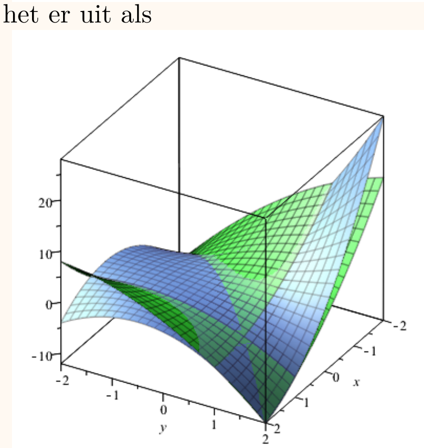
$$z(x,y) = -3 - 2(x-1) - 4(y-1) + (x-1)^2 - 3(x-1)(y-1) - (y-1)^2$$

$$= -x + y + x^2 - 3xy - y^2$$

De grafiek van deze benadering is



Samen in één figuur ziet het er uit als



In de buurt van $(1,1)$ verschillen de functie en de Taylorbenadering niet veel; verder weg wel.

De lineaire en kwadratische benaderingen van functies van twee variabelen zijn afkomstig van de **Stelling van Taylor van eerste en tweede orde.**

Voorbeeld: Stelling van Taylor van eerste orde

Bij een 'nette' functie $f(x,y)$ van twee variabelen x en y geldt rondom het punt $(x,y) = (a,b)$ met $\triangle x = x - a$ en $\triangle y = y - b$:

$$f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)\triangle x + f_y(a,b)\triangle y + R(x,y)$$

met restterm $R_1(x,y)$ gegeven door

$$R_1(x,y) = \frac{1}{2!}\big(f_{xx}(\xi,\eta)\triangle x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)\triangle x\triangle y + f_{yy}(\xi,\eta)\triangle y^2\big)$$

voor zekere ξ tussen a en x, en zekere η tussen b en y.

Voorbeeld: Stelling van Taylor van tweede orde

Bij een 'nette' functie $f(x,y)$ van twee variabelen x en y geldt rondom het punt $(x,y) = (a,b)$ met $\triangle x = x - a$ en $\triangle y = y - b$::

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(a,b) & \\ &+ f_x(a,b)\triangle x + f_y(a,b)\triangle y \\ &+ \frac{1}{2!}\big(f_{xx}(a,b)\triangle x^2 + 2f_{xy}(a,b)\triangle x\triangle y + f_{yy}(a,b)\triangle y^2\big) + R_2(x,y) \end{aligned}$$

met restterm $R_2(x,y)$ gegeven door

$$\begin{aligned} R_2(x,y) = \frac{1}{3!}\Big(& f_{xxx}(\xi,\eta)\triangle x^3 + 3f_{xxy}(\xi,\eta)\triangle x^2\triangle y \\ & + 3f_{xyy}(\xi,\eta)\triangle x\triangle y^2 + f_{yyy}(\xi,\eta)\triangle y^3\Big) \end{aligned}$$

voor zekere ξ tussen a en x, en zekere η tussen b en y.

Je kunt nog verder gaan, maar we laten het hierbij. De **Taylorreeks** bij functies van twee variabelen ziet er als volgt uit:

Voorbeeld: Taylorreeks

Bij een 'nette' functie $f(x,y)$ van twee variabelen x en y kunnen we functiewaarden rondom het punt $(x, y) = (a, b)$ benaderen via

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(a,b) & \\ &+ f_x(a,b)\triangle x + f_y(a,b)\triangle y \\ &+ \frac{1}{2!}\big(f_{xx}(a,b)\triangle x^2 + 2f_{xy}(a,b)\triangle x\triangle y + f_{yy}(a,b)\triangle y^2\big) \\ &+ \frac{1}{3!}\Big(f_{xxx}(a,b)\triangle x^3 + 3f_{xxy}(a,b)\triangle x^2\triangle y \\ &\qquad + 3f_{xyy}(a,b)\triangle x\triangle y^2 + f_{yyy}(a,b)\triangle y^3\Big) \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

met

$$\triangle x = x - a \quad \text{en} \quad \triangle y = y - b.$$

Opgaven: Berekenen van een kwadratische benadering

Vraag 1

Bereken de tweede orde benadering $z(x, y)$ van de functie

$$f(x,y) = xe^{xy+y}$$

rondom het punt $(1, 0)$.

$z(x, y) =$ ....

Theorie: Foutenleer

Stel x en y zijn twee grootheden die niet van elkaar afhangen en onafhankelijk gemeten worden, zeg met meetwaarden x_m en y_m, en met meetfouten $\triangle x$ en $\triangle y$. Stel dat je een samengestelde grootheid $z = x \cdot y$ nodig hebt. Wat zal de fout in z dan zijn? De linearisatie van $z(x \cdot y)$ spelt een rol bij het beantwoorden van deze vraag. Immers,

$$\begin{aligned} z(x_m + \triangle x, y_m + \triangle y) &\approx z(x_m, y_m) + z_x(x_m, y_m)\triangle x + z_y(x_m, y_m)\triangle y \\ &= z(x_m, y_m) + y_m\triangle x + x_m\triangle y \end{aligned}$$

Anders geformuleerd:

$$\frac{\triangle z}{z(x_m, y_m)} = \frac{\triangle x}{x_m} + \frac{\triangle y}{y_m}$$

Omdat niet het teken maar de groote van de fout van belang is, suggereert dit het volgende:

Bij vermenigvuldigen wordt de relatieve fout in de uitkomst de som van de relatieve fouten in de factoren.

Nu kijken we eens naar het quotiënt $z(x,y) = \dfrac{x}{y}$ van grootheden. Nu geldt via de totale differentiaal:

$$\begin{aligned}\triangle z(x_m, y_m) &\approx z_x(x_m, y_m)\triangle x + z_y(x_m, y_m)\triangle y \\ &= \frac{\triangle x}{y_m} - \frac{x_m \triangle y}{y_m^2} \\ &= \frac{x_m}{y_m}\left(\frac{\triangle x}{x_m} - \frac{\triangle y}{y_m}\right)\end{aligned}$$

oftewel

$$\frac{\triangle z}{z(x_m, y_m)} = \frac{\triangle x}{x_m} - \frac{\triangle y}{y_m}$$

Omdat niet het teken maar de groote van de fout van belang is, suggereert dit het volgende:

Bij delen wordt de relatieve fout in de uitkomst de som van de relatieve fouten in de teller en noemer.

We hebben tot nu toe geschreven dat de totale differentiaal de regels voor de doorwerking van fouten in formules suggereert. Dit komt omdat we geen rekening houden met het teken van fouten. Doen we dat wel dan light het voor de hand om kwadraten van afwijkingen te bestuderen. We kijken dan naar $(\triangle\, z)^2$ en we gaan in bovenstaande twee gevallen over op het 'kwadratisch opteellen' van relatieve fouten. Dit geeft:

Regel

Bij optellen en aftrekken wordt het kwadraat van de absolute fout in de uitkomst de som van de kwadraten van de absolute fouten in de termen.
Bij vermenigvuldigen en delen wordt het kwadraat van relatieve fout in de uitkomst de som van de kwadraten van de relatieve fouten in de factoren.

Opgaven: Schatten van een fout

Vraag 1

Stel dat je drie grootheden x, y en z meet en de samengestelde grootheid $w = ax + by + cz$, met a, b en c nodig hebt. Stel dat je metingen $x_m \pm \triangle x$, $y_m \pm \triangle y$ en $z_m \pm \triangle z$ hebt. Wat is dan de foutschatting van w?
Noteer de fouten als differentialen, dus dx in plaats van $\triangle x$, enzovoorts.

$dw =$ ....

Theorie: Richtingsafgeleide

De partiële afgeleide $f_x(a,b)$ van $f(x,y)$ is de afgeleide van $f(x,y)$ in (a,b) in de richting van de positieve x-as. Net zo is $f_y(a,b)$ de afgeleide van $f(x,y)$ in (a,b) in de richting van de positieve y-as. We kunnen ook in een willekeurige richting in het raakvlak aan de grafiek in $\big(a, b, f(a,b)\big)$ kijken; als we dan een vector met lengte 1 willen, dan komen we uit op de volgende definitie.

Definitie

De **richtingsafgeleide** van $f(x,y)$ in (a,b) in de richting van $(a+\triangle x,\ b+\triangle y)$ is

$$\frac{f_x(a,b)\triangle x + f_y(a,b)\triangle y}{\sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2}}$$

Theorie: De gradiënt

Definitie

De gradiënt van de functie $f(x,y)$ van twee variabelen x en y, genoteerd als $\nabla f(x,y)$ en uit te spreken als 'nabla', is de vector van partiële afgeleiden

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}$$

Voorbeeld

Bereken het gradiënt van de functie

$$f(x,y) = x^2 - 4y^2$$

in $(-1,1)$.
Uitwerking: We berekenen eerst de partiële afgeleiden:

$$f_x(x,y) = 2x \qquad \text{en} \qquad f_y(x,y) = -8y$$

Dus in het gegeven punt:

$$f_x(-1,1) = -2 \qquad \text{en} \qquad f_y(-1,1) = -8$$

Dus is de gradiënt van $f(x,y)$ in $(-1,1)$ gelijk aan de volgende vector

$$\nabla f(-1,1) = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

De betekenis van de gradiënt wordt duidelijk wanneer we ons realiseren dat dit de vector is zodanig dat het inproduct met de richtingsvector $\mathbf{dx} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ in het raakvlak van f in het punt $\big(x_0, y_0, f(x_0,y_0)\big)$ gelijk is aan de totale differentiaal in (x_0,y_0). Dus:

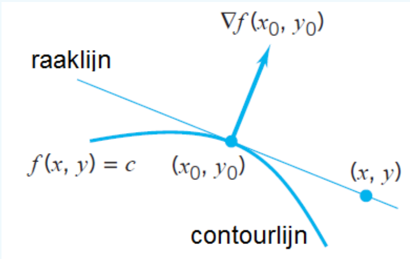
$$df(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot \mathbf{dx}$$

Veronderstel nu dat de richtingsvector $\mathbf{dx}$ een constante lengte heeft. dan is de totale differentiaal maximaal wanneer de richtingsvector dezelfde richting heeft als de gradiënt. Evenzo is de totale differentiaal minimaal in de richting tegengesteld aan de gradiënt. De totale differentiaal is gelijk aan 0 dan en slechts dan als de gradiënt loodrecht op de richtingsvector staat, die hoort bij een projectie van een niveaulijn door het punt $\big(x_0, y_0, f(x_0,y_0)\big)$ op het xy-vlak. Dus:

Regel

De gradiënt in een punt in het xy-vlak geeft de (geprojecteerde) richting aan waarin de functie f in het punt $\big(x, y, f(x, y)\big)$ het sterkst toeneemt.
De gradiënt staat loodrecht op de contourlijn van $f(x, y)$ door dat punt. De gradiënt is een normaalvector van de raaklijn in dat punt aan die contourlijn.

Onderstaande figuur illusteert de laatste bewering



De vergelijking van de raaklijn is

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0$$

Dus:

$$f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

Voorbeeld

We berekenen een vergelijking van de raaklijn aan de ellips

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$$

in het punt $(2, 1)$. Merk op dat de ellips een contourlijn is van de functie

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$

. De partiële afgeleiden van $f(x, y)$ zijn

$$f_x(x, y) = \frac{x}{2} \quad \text{en} \quad f_y(x, y) = 2y$$

De gradiënt van f in $(2, 1)$ is

$$\nabla f(2, 1) = \begin{pmatrix} f_x(2, 1) \\ f_y(2, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

De raaklijn aan de ellips in $(2, 1)$ bestaat uit punten (x, y) zodanig dat

$$\nabla f(2, 1) \cdot \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 1 \end{pmatrix} = 0$$

Dus:

$$1 \cdot (x - 2) + 2 \cdot (y - 1) = 0$$

oftewel

$$x + 2y - 4 = 0$$

Ook bij functies van drie of meer variabelen kun je de gradiënt op analoge wijze introduceren als vector van partiële afgeleiden. Bijvoorbeeld voor functies $f(x, y, z)$ van drie variabelen is het de vector

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_x(x,y,z) \\ f_y(x,y,z) \\ f_z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Opgaven: Berekenen van een gradiënt

Vraag 1

Bereken het gradiënt van de functie

$$f(x, y) = 4y - 3x^2$$

in $(0, -1)$.

Voer je antwoord in als een lijst of kolomvector.

$\nabla f(0, -1) =$ ....

Vraag 2

Bereken het gradiënt van de functie

$$f(x, y) = 3x^2 - 5y^2$$

in $(0, 0)$.

Voer je antwoord in als een lijst of kolomvector.

$\nabla f(0, 0) =$ ....

Vraag 3

Bereken het gradiënt van de functie

$$f(x, y) = x^2y + 3xy + 2x^2$$

in $(-1, -1)$.

Voer je antwoord in als een lijst of kolomvector.

$\nabla f(-1, -1) =$ ....

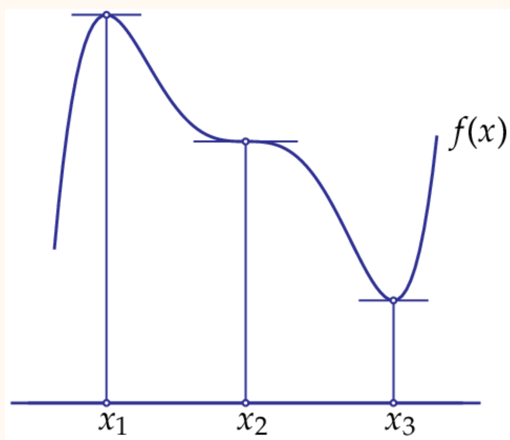
Theorie: Inleiding

Voorbeeld: Repetitie van bijzondere punten van functies van één veranderlijke

De begrippen stationair punt, maximum en minimum kennen we al voor functies van één variabele. De functie $f(x)$ heeft een lokaal minimum in $x = a$ als de grafiek in de buurt van $x = a$ boven $f(a)$ ligt, preciezer gezegd, als er een interval I om a is zodanig dat $f(x) \geq f(a)$ voor alle x uit I.
Bij een differentieerbare functie $f(x)$ is een minimum (of maximum) steeds een stationair punt, dat wil zeggen een punt $x = a$ waarin de raaklijn van f horizontaal is, oftewel $f'(a) = 0$. Een voldoende voorwaarde voor een minimum van $f(x)$ in $x = a$ is het tweede afgeleide criterium: Als $f'(a) = 0$ en $f''(a) > 0$, dan heeft $f(x)$ een lokaal minimum in $x = a$.
Met een Taylorbenadering van tweede orde rondom $x = a$ kunnen we dit als volgt begrijpen: als $x = a$ een stationair punt is, dan is de Taylorveelterm van graad 2 rondom $x = a$ gelijk aan

$$f(a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2.$$

In de buurt van $x = a$ ziet de functie er dus uit als een dalparabool met minimum $x = a$ als $f''(a) > 0$. In het geval $f''(a) < 0$, dan hebben we te maken met een bergparabool met maximum in $x = a$.
Als $f'(a) = 0$ en $f''(a) = 0$ dan kun je nog niet concluderen wat voor een stationair punt $x = a$ is: het kan een maximum of minimum zijn, maar het kan ook nog een buigpunt zijn, d.w.z. een punt waarin de afgeleide functie een maximum of minimum aanneemt. Onderstaande figuur illustreert de drie verschillende stationaire punten van een functie van één variabele.



Voor functies van twee of meer variabelen kunnen we een soortgelijke analyse opzetten, maar deze is zelfs voor functies van twee variabelen al gecompliceerder dan je misschien denkt.

Bij een differentieerbare functie f van twee of meer variabelen heet een punt een **stationair punt** van f als de gradiënt van f daar de nulvector is, met andere woorden, als alle partiële afgeleiden nul zijn in dat punt. Bij een functie $f(x,y)$ van twee variabelen is voor een stationair punt $(a, b$ het raakvlak aan de grafiek in $\bigl(a, b, f(a,b)\bigr)$ horizontaal. Immers, de normaalvector van een raakvlak in het punt $\bigl(a, b, f(a,b)\bigr)$ is dan verticaal omdat de algemene formule voor de normaalvector van dit raakvlak gegeven is door

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -f_x(a,b) \\ -f_y(a,b) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voor een stationair punt (a,b) is de linearisatie van de functie (oftewel de Taylorbenadering van eerste orde) de constante functie $f(a,b)$.

In het vervolg zullen we ons in de analyse van functies van meer variabelen beperken tot functies van twee variabelen.

Theorie: Stationaire punten

Een punt (a,b) is een stationair punt van de functie $f(x,y)$ als de gradiënt ∇f in dat punt de nulvector is. Dit betekent dat alle partiële afgeleiden in dit punt gelijk aan nul zijn en het raakvlak aan de grafiek in $\big(a,b,f(a,b)\big)$ horizontaal is.

Stationaire punten kun je dus vinden door het volgende stelsel van vergelijkingen op te lossen:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

Voorbeeld

Bereken het stationaire punt van de functie $f(x,y) = x^2 + xy + x + 3y - 6$.
Uitwerking: De partiële afgeleiden zijn

$$f_x(x,y) = 2x + y + 1 \qquad \text{en} \qquad f_y(x,y) = x + 3$$

De stationaire punten zijn dus de oplossingen van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ \;\;x \qquad\;\; + 3 = 0 \end{cases}$$

Er is maar één oplossing: $x = -3$ en dit geeft bij substitutie in de eerste vergelijking $2 \times -3 + y + 1 = 0$ en dus $y = 2 \times 3 - 1 = 5$.
Er is dus één stationair punt: $(-3, 5)$.

Voorbeeld

Bereken de stationaire punten van de functie

$$f(x,y) = 3x^2y + xy^2 - 3xy$$

De partiële afgeleiden zijn

$$f_x(x,y) = 6xy + y^2 - 3y \qquad \text{en} \qquad 3x^2 + 2xy - 3x$$

De stationaire punten zijn dus de oplossingen van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 3x^2y + xy^2 - 3xy = 0 \\ 3x^2 + 2xy - 3x \quad = 0 \end{cases}$$

We splitsen dit probleem op in deelproblemen door de linkerleden van de vergelijkingen te ontbinden in factoren. We vinden:

$$\begin{cases} y(6x + \ \ y - 3) = 0 \\ x(3x + 2y - 3) = 0 \end{cases}$$

We kunnen dus kennelijk $f_x(x, y)$ en $f_y(x, y)$ elk op twee manieren gelijk aan nul krijgen. Combinatie van mogelijkheden geeft vier oplossing:

- $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

- $\begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

- $\begin{cases} x = 0 \\ 6x + y - 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$

- $\begin{cases} 6x + \ \ y - 3 = 0 \\ 3x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -3y + 3 = 0 \\ 3x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = 1 \end{cases}$

Er zijn dus vier stationaire punten: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 3)$ en $(\frac{1}{3}, 1)$.

Opgaven: Berekenen van stationaire punten

Vraag 1

Bereken het stationaire punt van de functie $f(x, y) = x^2 + xy + 4x + 2y + 7$.
Voer je antwoord in als een lijst of kolomvector.

$[x, y] =$ ....

Vraag 2

Bereken het stationaire punt van de functie

$$f(x, y) = -2xy - 4y - 4x^2 + 2x - 1$$

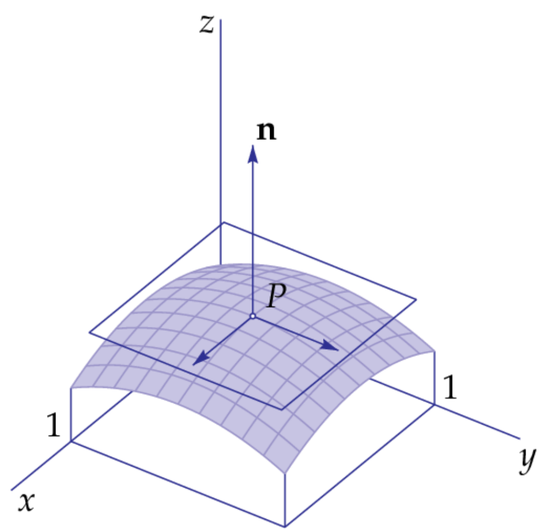
Voer je antwoord in als een lijst of kolomvector.

$[x, y] =$ ....

Theorie: Maximum, minimum en zadelpunt

Hieronder zie je de grafiek van de functie

$$f(x,y) = \tfrac{1}{2}\big((1 - (x - \tfrac{1}{2})^2 - (y - \tfrac{1}{2})^2\big)$$



Deze functie heeft als partiële afgeleiden:

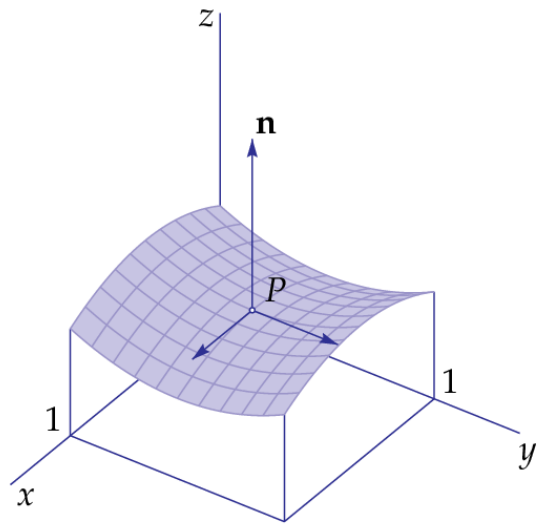
$$f_x(x,y) = \tfrac{1}{2} - x \qquad \text{en} \qquad f_y(x,y) = \tfrac{1}{2} - y$$

In het punt $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ zijn beide afgeleiden nul en is het raakvlak horizontaal. Dit punt is een stationair punt en de functie heeft daar een maximale waarde.

Maar net als bij functies van één veranderlijke is voor differentieerbare functies van twee variabelen de eis dat een punt een stationair punt is noodzakelijk maar niet voldoende om een punt tot maximum of minimum uit te roepen. We geven een tegenvoorbeeld.

Hieronder zie je de grafiek van de functie

$$f(x,y) = \tfrac{1}{2}\big((1 - (x - \tfrac{1}{2})^2 + (y - \tfrac{1}{2})^2\big)$$



Deze functie heeft als partiële afgeleiden:

$$f_x(x,y) = \tfrac{1}{2} - x \qquad \text{en} \qquad f_y(x,y) = y - \tfrac{1}{2}$$

In het punt $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ zijn beide afgeleiden weer nul en is het het raakvlak horizontaal. Maar de coördinatenlijn is in de richting van de x-as een bergparabool, en de coördinatenlijn is in de richting van de y-as een dalparabool. Zo'n punt wordt een zadelpunt genoemd.

Meer algemeen zeggen we dat de differentieerbare functie $f(x,y)$ een **zadelpunt** (a,b) heeft als het punt een stationair punt is, maar in de omgeving van het punt altijd punten (x,y) te vinden zijn zodanig dat $f(x,y) > f(a,b)$ én punten te vinden zijn zodanig dat $f(x,y) < f(a,b)$. Losjes gezegd is een zadelpunt het tweedimensionale analogon van een buigpunt bij een functie van één variabele.

Tot nu toe waren stationaire punten steeds één of meer losse punten. Maar dit hoeft niet zo te zijn. Als voorbeeld nemen we de functie

$$f(x,y) = \tfrac{1}{2}\big(1 - \sin(2x^2 - y - 1)\big)$$

Deze functie heeft als partiële afgeleiden:

$$f_x(x,y) = -2x\cos(2x^2 - y - 1) \qquad \text{en} \qquad f_y(x,y) = \tfrac{1}{2}\cos(2x^2 - y - 1)$$

De gradiënt is de nulvector in alle punten waarvoor geldt

$$\cos(2x^2 - y - 1) = 0$$

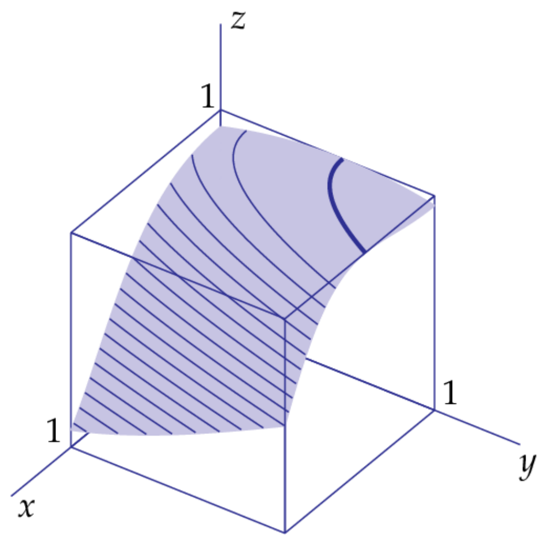
Stationaire punten zijn in dit geval geen geïsoleerde punten, maar punten die krommen vormen, namelijk de parabolen

$$2x^2 - y - 1 = \tfrac{1}{2}\pi + k\pi \qquad \text{met geheel getal } k$$

Een van die parabolen is

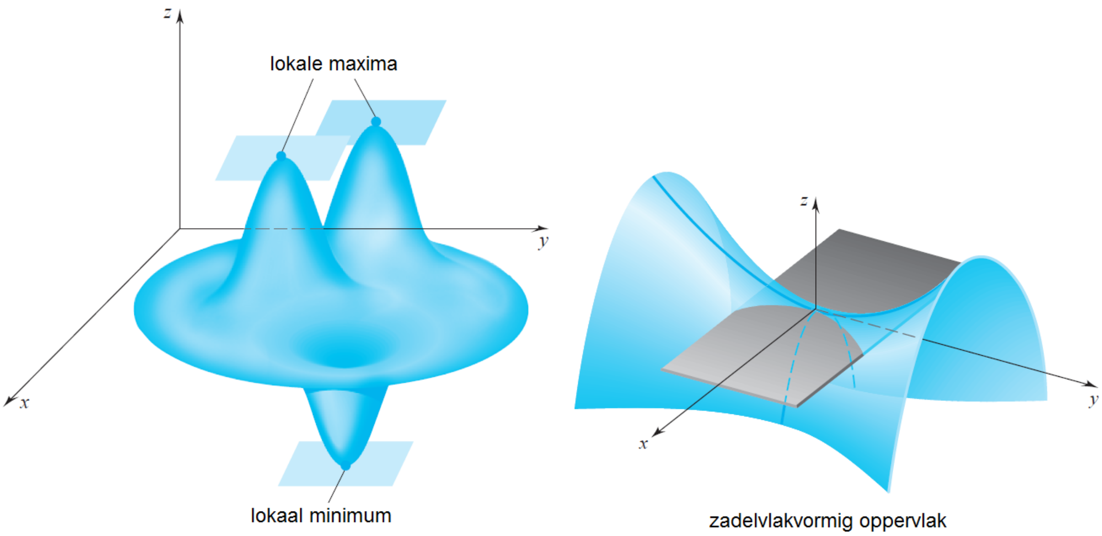
$$y = 2x^2 - 1 - \tfrac{1}{2}\pi$$

die hoort bij de niveaulijn op hoogte 1 is in onderstaande grafiek dikker getekend. In alle punten van die parabool bereikt de functie een maximale waarde. Het bijbehorende raakvlak is het vlak $z = 1$, het bovenvlak van de kubus die eromheen is getekend.



Theorie: Criteria voor extrema en zadelpunt

Onderstaande figuur illustreert het bestaan van lokale extrema en zadelpunten bij functies van twee variabelen.



Net als bij functies van één variabelen willen we graag goed hanteerbare criteria hebben om het karakter van een stationair punt te kunnen bepalen. Hiervoor kijken we naar de Taylorbenadering van tweede orde van $f(x, y)$ rondom een stationair punt (a, b). Bij een 'nette' functie $f(x, y)$ van twee variabelen x en y hebben we al gezien dat we functiewaarden rondom het punt $(x, y) = (a, b)$ kunnen benaderen via

$$\begin{aligned} f(x,y) \approx\ & f(a,b) + f_x(a,b)\triangle x + f_y(a,b)\triangle y \\ & + \frac{1}{2}\big(f_{xx}(a,b)\triangle x^2 + 2f_{xy}(a,b)\triangle x\triangle y + f_{yy}(a,b)\triangle y^2\big) \end{aligned}$$

met

$$\triangle x = x - a \quad \text{en} \quad \triangle y = y - b.$$

In het geval van een stationair punt vereenvoudigt dit tot

$$f(x,y) \approx f(a,b) + \frac{1}{2}\big(f_{xx}(a,b)\triangle x^2 + 2f_{xy}(a,b)\triangle x\triangle y + f_{yy}(a,b)\triangle y^2\big)$$

Het gedrag van de tweede orde benadering van $f(x,y)$ rondom het stationaire punt (a,b) wordt dus bepaalt door de kwadratische functie

$$h(\triangle x, \triangle y) = f_{xx}(a,b)\triangle x^2 + 2f_{xy}(a,b)\triangle x\triangle y + f_{yy}(a,b)\triangle y^2$$

- Als $h(\triangle x, \triangle y)$ buiten $(0,0)$ alleen positieve waarden aanneemt, dan is $(a,b$ een lokaal minimum van de functie $f(x,y)$.
- Als $h(\triangle x, \triangle y)$ buiten $(0,0)$ alleen negatieve waarden aanneemt, dan is $(a,b$ een lokaal maximum van de functie $f(x,y)$.
- Als $h(\triangle x, \triangle y)$ buiten $(0,0)$ zowel positive als negatieve waarden aanneemt, dan heeft de functie $f(x,y)$ een zadelpunt in (a,b).

Het verloop van $h(x,y)$ is nauw verbonden met de determinant van de **Hesse matrix** gedefinieerd als

$$\text{Hesse matrix van } f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

en uitgerekend in $(a,b$. De deteriminant van de Hesse matrix heet de **disciminant** of **Hessiaan van** $f(x,y)$. We noteren

$$H(x,y) = f_{xx}(x,y)\cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2$$

en het verband met $h(\triangle x, \triangle y)$ is (via kwadraatafsplitsen):

$$h(\triangle x, \triangle y) = \frac{1}{f_{xx}(a,b)}\Big((f_{xx}(a,b)\triangle x + f_{xy}(a,b)\triangle y)^2 + \triangle y^2 \cdot H(a,b)\Big)$$

We kunnen hieruit het volgende criterium destilleren:

Voorbeeld: Partiële-afgeleiden-test voor een lokaal extremum of zadelpunt

Voor een 'nette' functie $f(x,y)$ en een stationair punt (a,b) geldt:

- Als $H(a,b) > 0$ en $f_{xx}(a,b) > 0$, dan is (a,b) een lokaal minimum van de functie $f(x,y)$.
- Als $H(a,b) > 0$ en $f_{xx}(a,b) < 0$, dan is (a,b) een lokaal maximum van de functie $f(x,y)$.
- Als $H(a,b) < 0$, dan heeft de functie $f(x,y)$ een zadelpunt in (a,b).

waarbij

$$H(a,b) = \det\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix} = f_{xx}(a,b)\cdot f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2$$

Voorbeeld

We bekijken opnieuw de functie

$$f(x,y) = 3x^2y + xy^2 - 3xy$$

De partiële afgeleiden zijn

$$f_x(x,y) = 6xy + y^2 - 3y \qquad \text{en} \qquad 3x^2 + 2xy - 3x$$

De stationaire punten zijn dus de oplossingen van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 3x^2y + xy^2 - 3xy = 0 \\ 3x^2 + 2xy - 3x \quad = 0 \end{cases}$$

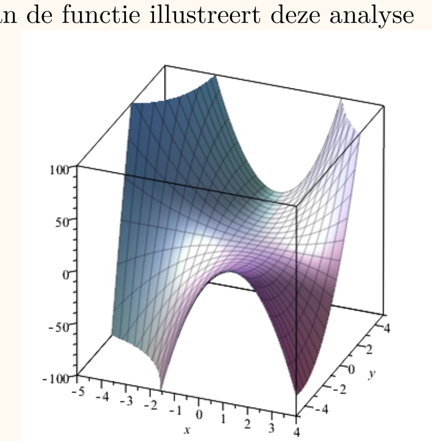
We hebben dit probleem al eerder opgelost: Er zijn dus vier stationaire punten: $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,3)$ en $(\frac{1}{3},1)$. We kijken nu naar de aard van deze stationaire punten.
We bereken eerst de partiële afgeleiden van tweede orde:

$$f_{xx}(x,y) = 6y, \qquad f_{xy}(x,y) = 6x + 2y - 3, \qquad f_{yy}(,y) = 2x.$$

Met het volgende schema kunnen we uitspraken over de stationaire punten doen

(a,b)	$f_{xx}(a,b)$	$f_{xy}(a,b)$	$f_{xy}(a,b)$	$H(a,b)$	*conclusie*
$(0,0)$	0	-3	0	-9	zadelpunt
$(1,0)$	0	3	2	-9	zadelpunt
$(0,3)$	18	3	0	-9	zadelpunt
$(\frac{1}{3},1)$	6	1	$\frac{2}{3}$	3	minimum

Onderstaande grafiek van de functie illustreert deze analyse



Voorbeeld

Bereken de extreme waarden van

$$f(x,y) = (x^2 + y)e^y$$

Kandidaatpunten voor maxima en minima zijn de punten waar beide partiële afgeleiden nul zijn:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\ (x,y) = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\ (x,y)0$$

Dit levert de volgende twee vergelijkingen op:

$$2xe^y = 0 \quad \text{en} \quad e^y + (x^2+y)e^y = 0$$

Omdat e^y nooit nul is, volgt uit de eerste vergelijking dat $x = 0$. Vullen we dit in de tweede vergelijking in, dan levert dit $e^y + ye^y = (1+y)e^y = 0$. Opnieuw omdat e^y nooit nul is, zien we dat $y = -1$.
Om te zien of het punt $(x,y) = (0,-1)$ een minimum, maximum, of zadelpunt is, berekenen we de tweede orde afgeleiden. We hebben

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2e^y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2xe^y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2e^y + (x^2+y)e^y$$

Dus is de Hesse matrix in het gegeven punt gelijk aan

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,-1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,-1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/e & 0 \\ 0 & 1/e \end{pmatrix}$$

Omdat de determinant van deze matrix positief is, en het linker bovenelement ook positief is, geeft het punt $(0,-1)$ een minimum.

Voorbeeld

Beschouw het vlak $V = \{2x - y + z = 1\}$ en het punt $(-4,1,3)$ in $\mathbb{R}^3$. Wat is de kleinste afstand van dit punt tot het vlak?
De afstand van $(-4,1,3)$ tot een punt (x,y,z) dat in V ligt, is gelijk aan $\sqrt{(x+4)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2}$. Deze afstand willen we minimaliseren. Nu is de wortel uit $(x+4)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2$ minimaal precies als $(x+4)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2$ minimaal is, en kunnen we deze kwadratische functie minimaliseren. Voor (x,y,z) in V geldt $z = 1 - 2x + y$. Als we dit in de kwadratische functie invullen, krijgen we de volgende functie van twee variabelen (x,y) die we moeten minimaliseren:

$$f(x,y) = (x+4)^2 + (y-1)^2 + (y-2x-2)^2$$

Bereken

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x+4) - 4(y-2x-2) & 2(y-1) + 2(y-2x-2) \end{pmatrix}$$

Beide elementen van de matrix $Df(x,y)$ moeten nul zijn in een minimum. Dit levert de twee vergelijkingen op:

$$\begin{cases} 2(x+4) - 4(y-2x-2) = 0 \\ 2(y-1) + 2(y-2x-2) = 0 \end{cases}$$

oftewel

$$\begin{cases} 10x \quad -4y \quad +16 = 0 \\ \quad -4x + 4y - 6 = 0 \end{cases}$$

De oplossing hiervan is $(x, y) = (-\frac{5}{3}, -\frac{1}{6})$, waarvoor

$$f(-\tfrac{5}{3}, -\tfrac{1}{6}) = (\tfrac{14}{6})^2 + (-\tfrac{7}{6})^2 + (\tfrac{7}{6})^2 = \tfrac{49}{6}$$

De Hesse matrix van tweede orde partiële afgeleiden is

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Hieraan zien we bevestigd dat het een minimum betreft (waarom ook al weer?). Ergo, de minimale afstand van $(-4, 1, 3)$ tot het vlak V is $\sqrt{\frac{49}{6}}$, en het punt op V dat het dichtst bij $(-4, 1, 3)$ ligt, is $(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{25}{6})$.

Opgaven: Karakteriseren van een stationair punt

Vraag 1.1

Bereken het stationaire punt van de functie

$$f(x, y) = 3y^2 + 2xy + 3x^2$$

Voer je antwoord in als een lijst of kolomvector.

$[x, y] =$ ....

Vraag 1.2

We bekijken de functie

$$f(x, y) = 3y^2 + 2xy + 3x^2$$

We hebben al het stationaire punt (a, b) bepaald: het is namelijk gegeven door

$$(a, b) = (0, 0)$$

In dit onderdeel bepaal je de aard van het stationaire punt via de partiële-afgeleiden-test.

Bereken de Hessiaan

$$H(a, b) = f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2$$

Gebruik dit resultaat om de aard van het stationaire punt te bepalen.

$H(0,0) =$ ....

$(0,0)$ is een .... (toets in het woord *minimum*, *maximum*, *zadelpunt*, *onbekend*)

Vraag 2.3

Bereken het stationaire punt van de functie

$$f(x,y) = -5y^2 - 2xy + y + 3x^2 + 3x$$

Voer je antwoord in als een lijst of kolomvector.

$[x,y] =$ ....

Vraag 2.4

We bekijken de functie

$$f(x,y) = -5y^2 - 2xy + y + 3x^2 + 3x$$

We hebben al het stationaire punt (a,b) bepaald: het is namelijk gegeven door

$$(a,b) = (-\frac{7}{16}, \frac{3}{16})$$

In dit onderdeel bepaal je de aard van het stationaire punt via de partiële-afgeleiden-test.

Bereken de Hessiaan

$$H(a,b) = f_{xx}(a,b) \cdot f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2$$

Gebruik dit resultaat om de aard van het stationaire punt te bepalen.

$H(-\frac{7}{16}, \frac{3}{16}) =$ ....

$(-\frac{7}{16}, \frac{3}{16})$ is een .... (toets in het woord *minimum*, *maximum*, *zadelpunt*, *onbekend*)

Theorie: Newton's methode

We hebben al eerder gezien hoe numeriek een oplossing van een vergelijking met één onbekende gevonden kan worden.
In het algemeen zal een stelsel van n vergelijkingen met evenveel onbekenden ook geïsoleerde oplossingen (denk hierbij aan een eindig aantal oplossingen) hebben.

Voorbeeld

Beschouw de volgende twee vergelijkingen in de onbekenden x, y:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & 1 \\ 2xy & = & 0 \end{cases}$$

Uit de tweede vergelijking halen we dat x of y of beide 0 moeten zijn. Als $x = 0$, geeft de eerste vergelijking $-y^2 = 1$. Dit is niet mogelijk. Als $y = 0$, geeft de eerste vergelijking $x^2 = 1$. Dit heeft oplossingen $x = 1$ en $x = -1$.
De oplossingen van het stelsel vergelijkingen zijn de twee vectoren $\big(x, y\big) = \big(1, 0\big)$ en $\big(x, y\big) = \big(-1, 0\big)$.

In deze sectie wordt Newton's methode beschreven om zulke vergelijkingen op te lossen. We beperken ons in de beschrijving van Newton's methode tot twee vergelijkingen met twee onbekenden. Laat $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ een continu differentieerbare afbeelding zijn. Om de vergelijking $\mathbf{f}(x, y) = (0, 0)$ numeriek op te lossen, beschouwen we het volgende iteratieve proces. Neem een vector $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$. Gegeven (x_n, y_n) voor $n \geq 1$, laten we (x_{n+1}, y_{n+1}) bepaald zijn door

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) - [D\mathbf{f}(x_n, y_n)]^{-1}\, \mathbf{f}(x_n, y_n)$$

Dat wil zeggen, met

$$N(x, y) = (x, y) - [D\mathbf{f}(x_n, y_n)]^{-1}\, \mathbf{f}(x_n, y_n)$$

laten we

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = N(x_n, y_n)$$

Voorbeeld

Kijkend naar bovenstaand voorbeeld, schrijven we $\mathbf{f}(x, y) = (x^2 - y^2 - 1, 2xy)$.
Het stelsel vergelijkingen heeft dan de vorm $\mathbf{f}(x, y) = (0, 0)$. Er geldt:

$$D\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

De inverse $[D\mathbf{f}(x, y)]^{-1}$ hiervan wordt gegeven door

$$[D\mathbf{f}(x, y)]^{-1} = \frac{1}{4(x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2y & 2x \end{pmatrix}$$

Immers,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

is de algemene formule voor een inverse van een twee bij twee matrix (die bestaat als de determinant $ad-bc$ ongelijk aan 0 is). Merk op dat $[D\mathbf{f}(x,y)]^{-1}$ bestaat als $(x,y) \neq (0,0)$. Om $N(x,y) = (x,y) - [D\mathbf{f}(x,y)]^{-1}\,\mathbf{f}(x,y)$ te bepalen, berekenen we

$$[D\mathbf{f}(x,y)]^{-1}\,\mathbf{f}(x,y) = \frac{1}{4(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2y & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2-y^2-1 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

Uitwerken geeft

$$N(x,y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2(x^2+y^2)} \;, \frac{y}{2} - \frac{y}{2(x^2+y^2)} \right)$$

Newton's methode werkt als volgt. Neem aan dat $(\bar{x},\bar{y})$ een oplossing is van $\mathbf{f}(x,y) = 0$ waarvoor $D\mathbf{f}(\bar{x},\bar{y})$ inverteerbaar is (dat wil zeggen, $[D\mathbf{f}(\bar{x},\bar{y})]^{-1}$ bestaat).
Dan convergeert (x_n, y_n) gedefinieerd door iteratie van N naar $(\bar{x},\bar{y})$ voor $n \to \infty$ ($\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ en $\lim_{n\to\infty} y_n = \bar{y}$), als de beginvector (x_1, y_1) dicht bij $(\bar{x},\bar{y})$ gekozen wordt. We zullen niet uitwerken hoe dicht (x_1, y_1) bij $(\bar{x},\bar{y})$ gekozen moet worden. In ieder geval levert Newton's methode een procedure om benaderingen van oplossingen te verbeteren. Door begincondities te proberen kunnen bovendien oplossingen gevonden worden.

In een oplossing $(\bar{x},\bar{y})$ van $\mathbf{f}(x,y) = 0$ geldt dat $DN(\bar{x},\bar{y})$ gelijk aan de nulmatrix is. Hoewel we de achterliggende theorie van Newton's methode niet behandelen, is dit de reden dat de methode zo goed werkt en (x_{n+1}, y_{n+1}) sneller dan exponentieel snel (in n) naar een oplossing convergeert.